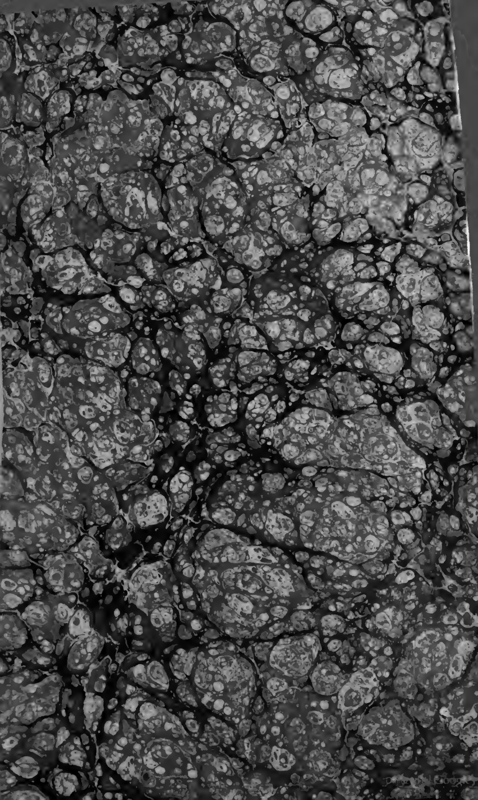


CORSO

DI

GEOMETRIA ELEMENTARE

DIVISO IN DUE VOLUMI

VOL. I.

Che contiene i primi sei Libri degli Elementi di EUCLIDE con note in fine.



I PRIMI SEI LIBRI
DEGLI ELEMENTI
DI
EUCLIDE

Emendati in que' luoghi ne' quali una volta furono viziati da Teone, o da altri; e restituitevi alcune definizioni, e dimostrazioni dello stesso Euclide

DA V. FLAUTI

TERZA EDIZIONE.

Optime illi mihi de Geometria meriti esse videntur, qui in antiquis auctoribus emendandis, illustrandisque operam posuerunt.

Tor. Praef. in Arch.



NAPOLI
NELLA STAMPERIA DELL' ISTRUZIONE PUBBLICA
1812.



I PRIMI SEI LIBRI

DEGLI ELEMENTI

DI

EUCLIDE

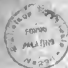
Emendati in que' luoghi ne' quali una volta furono viziati da Teone, o da altri; e restituitevi alcune definizioni, e dimostrazioni dello stesso Euclide

Da V. FLAUTI

TERZA EDIZIONE.

Optime illi mihi de Geometria meriti esse videntur, qui in antiquis auctoribus emendandis, illustrandisque operam posuerunt.

Tor. Praef. in Arch.



NAPOLI

NELLA STAMPERIA DELL' ISTRUZIONE PUBBLICA

1812.





AVVERTIMENTO

È questa la terza edizione del Corso di Geometria Elementare, che comprende i primi sei libri degli Elementi di Euclide, l'undecimo, ed il duodecimo; il primo libro di Archimede sulla sfera, e sul cilindro; e la Misura del cerchio.

Mi pare inutile il ripetere ogni volta lo stesso sul merito di questi libri di Euclide, e sulla necessità che v'era di liberare il Testo Greco da molti difetti, che vi aveva causati la mano imperita di qualche antico espositore; del che mi sono molto occupato, come si potrà rilevare dalle *Note critiche e geometriche*, aggiunte in fine a ciascun volume: ciò che solamente mi occorre far quì avvertire si è, che non mi sono fatto sorprendere dall' ordinaria taccia, che si dà agli Elementi di Euclide da coloro, che misurano, ma non estimano i libri elementari di Geometria, de' quali il principal pregio consiste nella chiarezza, e nel rigore. Per me importa poco, che una proposizione abbia dieci righe di più, purchè essa sia chiara, e purchè non vi si

contenga niente di assunto, o arbitrario. E queste dieci righe di più, scritte per non far salti, fanno perder certamente al giovane meno tempo di quello, che deve impiegare per indovinar spesse volte ciò, che si fa nelle costruzioni, o che si assume nelle dimostrazioni. Oltre di che gli formano poco a poco uno spirito geometrico preciso, e rigoroso. Ed a questo proposito, il celebre Giuseppe Torelli aveva ben ragione di dire, nella Prefazione al suo Archimede, per questi partigiani di una malintesa brevità: *de brevitate quam tantopere jactant, quod dicunt, id nihil est; cum breve nihil dici debeat, quod sine explicatione aliqua intelligi nequit, et minus perspicue traditur.*

Questi due volumi del Corso di Geometria Elementare saranno seguiti da un' Addizione, la quale conterrà due brevi trattati uno di Trigonometria Rettilinea, ch' è quello già altra volta stampato in fine del secondo volume della prima edizione, e l'altro di Trigonometria Sferica.

Il motivo che mi ha fatto decidere a staccare questi due Trattati dal Corso di Geometria Elementare, e pubblicarli separatamente è assai facile ad intenderlo.

Tutti sanno, che nelle due Trigonometrie si fa uso di metodi approssimanti, e lontani

perciò dall'esattezza, e rigor geometrico; ed inoltre non disconvenendo affatto, che le ricerche trigonometriche si trattino coll'analisi algebrica, ho voluto lasciare a coloro, che insegneranno questo mio Corso, l'arbitrio di servirsi per essè di quel metodo, che loro fosse sembrato più confacente.

Questa terza edizione del Corso di Geometria Elementare sarà seguita dalla terza edizione del completissimo Trattato delle Sezioni Coniche, pubblicato già per la seconda volta nel 1810. dal mio collega Sig. Felice Giannattasio, lavoro che fa veramente onore non solamente al degno Geometra, che n'è l'autore, ma alla Nazione, ed a' tempi nostri.

Finalmente debbo avvertire, per intelligenza delle citazioni al margine, che la lettera *d* dinota *definizione*, l' *a*, *assioma*; l' *l*, *lemma*; il *po*, *postulato*; il *pr*, *principio*, la *p*, *proposizione*: e che le cifre Arabe, che seguono queste indicazioni dinotano il numero della proposizione, del postulato, ec.; e le cifre Romane disegnano il libro cui una di tali cose si appartiene: e questo secondo numero ho talvolta tralasciato di porvelo, quando si trattava del Libro I.; come anche ho taciuta la *p* per dinotare propo-

sizione, allorchè ho dovuto combinare insieme la cifra Romana, e l' Araba.

ERRATA

Pag. 5 nelle citazioni — *po.* 2, corriggasi *po.* 1: *d.* 14 — *d.* 24
Pag. 9 nelle citazioni — *p.* 14 — *p.* 4
Pag. 13 lin. 8 invece di *le CA*, si corrigga *le BA, CA*
Pag. 16 lin. 2, e 26 *indeterminata* corriggasi *interminata*
Pag. 20 lin. 10, *BC* si corrigga *AC*
Pag. 26 lin. 9 *CK* corriggasi *GH*
Pag. 39 lin. ult. *BCD* corriggasi *BDC*
Pag. 65 lin. 23 *KLM* corriggasi *NLM*
Pag. 74 lin. 23, *alla BA* — *a'la CA*
Pag. 75 lin. 10 — *DC* corrigasi — *DB*
Pag. 76 lin. 8, e 77 lin. 5 *intercettata* corriggasi *interposta*
Pag. 107 nella citazione 33. 111 corriggasi 23. 111
Pag. 107, e 108 la citaz. 5. I. si cambj nell' altra 6. I.
Pag. 113 lin. 27, *maggiore*, leggasi *minore*, e lin. 28 *minore* si corrigga *maggiore*
Pag. 116 lin. 27, *l' angolo AEB* si legga *l' angolo AHB*
Pag. 122 lin. 22 *ED* corriggasi *FD*
Pag. 149 lin. 7 *a B* corriggasi *a D*
ivi lin. 10 *ad E* corriggasi *a D*
Pag. 161 lin. 1 *maggiore* FG, corriggasi *maggiore di FG*
Pag. 195 lin. 4 *AEB* corriggasi *ACB*
Pag. 225 la citazione *Prop. VI* si corrigga *A. VI.*

IL PRIMO LIBRO
DEGLI
ELEMENTI DI EUCLIDE.

DEFINIZIONI.

I. Il *punto* è ciò, che non ha parte alcuna.

II. La *linea* è una lunghezza senza larghezza.

III. Gli estremi della linea sono i punti.

IV. La linea *retta* è quella, che giace ugualmente tra i suoi punti.

V. La *superficie* è ciò, che ha solamente lunghezza e larghezza.

VI. Gli estremi della superficie sono le linee.

VII. La superficie *piana* è quella, che giace ugualmente tra le sue linee.

VIII. L' *angolo piano* è l' inclinazione di due linee, che, giacendo in un piano, si toccano scambievolmente, senza starne per dritto.

IX. Quando poi le linee che contengono un angolo sono rette, l' angolo dicesi *rettilineo*.

X. Allorchè una linea retta insistendo sopra di un' altra linea retta, forma uguali gli angoli, che sono di quà e di là; l' uno e l' altro degli angoli uguali è *retto*, e la linea retta che insiste, si chiama *perpendicolare* a quella, su cui insiste.

XI. *Ottuso* è l' angolo, ch' è maggiore del retto.

XII. *Acuto* poi quello, che del retto è minore.

XIII. Il *termine* è ciò, ch'è l'estremo di qualche cosa

XIV. La *figura* è ciò, che si contiene da uno, o più termini.

XV. Il *cerchio* è una figura piana contenuta da una sola linea, che chiamasi *circonferenza*; talchè tutte le linee rette, che si tirano a questa dà un punto, che esiste dentro alla figura, sono uguali fra loro.

XVI. Un tal punto chiamasi *centro* del cerchio.

XVII. Il *diametro* del cerchio è una linea retta tirata per lo centro, e terminata da ambe le parti dalla circonferenza di esso.

XVIII. Il *semicerchio* è una figura compresa dal diametro, e da una delle due parti della circonferenza, che questo ne tronca.

XIX. Il *segmento* del cerchio è una figura, che si comprende da una linea retta, ch'è dentro del cerchio, e da una delle due parti della circonferenza, che questa ne taglia.

XX. Le figure *rettilinee* sono quelle, che sono comprese da linee rette.

XXI. Le *trilatere* quelle, che da tre.

XXII. *Le quadrilatere* che da quattro.

XXIII. Le *multilatere* quelle, che si contengono da più di quattro.

Delle figure trilatere.

XXIV. Il triangolo *equilatero* è quello, che ha i tre lati uguali.

XXV. L'*isoscele* è quello, che ha solamente due lati uguali.

XXVI. Lo *scaleno* quell'altro, che ha disuguali i tre lati.

Inoltre tra le figure trilatere.

XXVII. Il triangolo *rettangolo* è quello, che ha un angolo retto.

XXVIII. L' *ottusangolo* ogni altro, che ha un angolo ottuso.

XXIX. L' *acutangolo* quello, che ha acuti i tre angoli.

Delle figure quadrilatere.

XXX. Il *quadrato* è quella figura, ch' è equilatera e rettangola.

XXXI. Il *rettangolo* è quella, che ha retti gli angoli; ma non è equilatera.

XXXII. Il *rombo* è l' altra, ch' è equilatera; ma non rettangola.

XXXIII. Il *romboide* e poi quella, che ha i lati, e gli angoli opposti rispettivamente uguali, senza nè essere equilatera, nè rettangola.

XXXIV. Ogni altra figura quadrilatera diversa da queste, si chiama *trapezio*.

XXXV. Linee rette *parallele* sono quelle, che esistendo in uno stesso piano, prodotte indefinitamente, non concorrono nè dall' una parte, nè dall' altra.

POSTULATI.

I. Si dimandi di tirare da un punto ad un altro una linea retta.

II. Similmente di prolungare una linea retta terminata quanto ne piaccia.

III. Di descrivere un cerchio con un qualsivoglia centro, ed intervallo.

IV. E che tutti gli angoli retti sieno tra di loro uguali.

v. Ed inoltre, che se in due linee rette vi cada un' altra linea retta, e faccia gli angoli interni dalla stessa parte minori di due retti; quelle due linee rette, prolungate indefinitamente, debbano incontrarsi verso quella parte, ove gli angoli sono minori di due retti.

N. B. Questo postulato, che per ragion di metodo si è qui recato seguendo Euclide, e del quale non dovrà farsene uso prima della proposizione XXIX. di questo primo libro, s' intenderà bene, dopo di aver appresa la proposizione XXVIII.

ASSIOMI, O NOZIONI COMUNI.

I. Le grandezze uguali ad una terza, sono uguali tra di loro.

II. Se a grandezze uguali aggiungansi grandezze uguali, i tutti saranno uguali.

III. E se da grandezze uguali tolgansi grandezze uguali, i residui pure saranno uguali.

IV. Se a grandezze disuguali aggiungansi grandezze uguali, i tutti saranno disuguali.

V. E se da grandezze disuguali tolgansi grandezze uguali, i residui anche saranno disuguali.

VI. I doppj di una stessa grandezza, sono tra di loro uguali.

VII. Le metà di una medesima grandezza, sono uguali tra di loro.

VIII. Le grandezze che combaciano sono uguali.

IX. Il tutto è maggiore della parte.

X. Due rette non chiudono spazio.

PROPOSIZIONE I.

PROBLEMA.

Sopra di una data linea retta terminata costituire un triangolo equilatero.

Sia la data linea retta terminata AB: fa d'uopo *fig.* 1.
costituire sopra di essa un triangolo equilatero.

Col centro A, intervallo AB si descriva il cerchio
BCD *: e similmente col centro B, intervallo BA, * po. 3.
si descriva l'altro cerchio ACE: e poi dal punto C
ove scambievolmente si segano i due cerchi, si tirino ai punti A, B le linee rette CA, CB (*). * po. 2.

E poichè il punto A è il centro del cerchio CDB,
dee essere la linea retta AC uguale all'altra AB *. * d. 15.
E similmente poichè il punto B è il centro del cerchio CAE, l'è pure BC uguale ad AB. Ma si
è dimostrato che CA è uguale ad AB: dunque sì
CA, che CB è uguale ad AB. Or le grandezze che
sono uguali ad una terza, sono uguali tra di loro *: * a. 1.
dunque CA è uguale a CB; e perciò le tre CA,
AB, BC sono tra di loro uguali.

Quindi il triangolo ABC è equilatero *, ed è co- * d. 14.
stituito sulla data linea retta terminata AB. C. B. F.

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA.

Da un punto dato condurre una linea retta uguale ad una linea retta data.

Sia A il punto dato, e BC la linea retta data; *fig.* 2.

fa d' uopo condurre dal punto A una linea retta uguale alla data BC.

Si tiri dal punto A al punto B la linea retta
* po. 1. AB *, sulla quale si costituisca il triangolo equila-
* p. 1. tero DAB * : poi si prolunghino le DA, DB ver-
* po. 2. so E ed F *; e col centro B, intervallo BC si
* po. 3. descriva il cerchio CGH *; e nel modo stesso, col centro D, intervallo DG si descriva il cerchio GKL.

E poichè il punto B è il centro del cerchio CGH,
* d. 15. dee essere BC uguale a BG *; e per la stessa ragione, essendo D il centro del cerchio GKL, DL è uguale a DG: e poichè DA è uguale a DB; la
* a. 3. rimanente AL sarà uguale alla rimanente BG *. Ma si è dimostrata BC uguale a BG: quindi tanto AL, che BC è uguale a BG. Or le grandezze che sono uguali ad una terza, sono tra di loro uguali: dunque AL è uguale a BC.

E quindi dal dato punto A si è condotta la linea retta AL uguale alla data BC. C. B. F.

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA.

Date due linee rette disuguali, tagliare dalla maggiore una parte uguale alla minore.

fig. 3. Le due date linee rette disuguali sieno AB, e C, delle quali sia AB la maggiore: fa d' uopo tagliare dalla maggiore AB una parte uguale alla minore C.

Si conduca dal punto A la linea retta AD uguale
* p. 2. a C *: e poi col centro A, intervallo AD si
* po. 3. descriva il cerchio DEF *.

E poichè il punto A è centro del cerchio DEF, sarà AE uguale ad AD. Ma anche C è uguale ad AD: quindi sì la linea retta AE, che l' altra C sono uguali alla stessa AD, e perciò AE è uguale a C *. * a. 1.

Dunque date le due linee rette disuguali AB, e C, dalla maggiore AB, se n' è tagliata la parte AE uguale alla minore C. C. B. F.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Se due triangoli abbiano due lati uguali a due lati, ciascuno a ciascuno, ed abbiano anche uguali gli angoli compresi dai lati uguali: sarà pure la base uguale alla base, il triangolo uguale al triangolo, ed i rimanenti angoli saranno uguali ai rimanenti angoli, ciascuno a ciascuno, quelli cioè che sono sottesi dai lati uguali, o sia ai quali sono opposti i lati uguali.

Sieno i due triangoli ABC, DEF, i quali abbiano i due lati AB, AC, uguali ai due lati DE, DF, ciascuno a ciascuno, cioè il lato AB uguale al lato DE, e 'l lato AC al lato DF: e sia l' angolo BAC compreso dai lati BA, AC uguale all' angolo EDF, ch' è compreso dagli altri ED, DF: dico che sia anche la base BC uguale alla base EF; il triangolo ABC uguale al triangolo DEF; e che i rimanenti angoli sieno uguali ai rimanenti angoli, ciascuno a ciascuno, cioè l' angolo ABC all' angolo DEF, e l' angolo ACB all' angolo DFE. *fig.* 4.

Poichè se s'intenda applicato il triangolo ABC sul triangolo DEF, in modo che il punto A cada sul punto D, e la linea retta AB sulla DE; dovrà cadere anche la linea retta AC sulla DF, essendo l' angolo BAC uguale all' angolo EDF. Ma son pure i lati AB, AC uguali ai lati DE, DF ciascuno a ciascuno; dunque dovrà cadere il punto B sul punto E, e 'l punto C sull' altro F. Quindi la base BC combacerà colla base EF. Poichè se cadendo il punto B sul punto E, e 'l punto C sull' altro F, la base BC non combaci colla base EF, due rette dovrebbero chiudere spazio; ciò ch' è im-
* a. 10. possibile *. Perciò la base BC coinciderà colla base EF
* a. 8. e le sarà uguale* : il triangolo ABC combaciando col triangolo DEF, gli sarà pure uguale; ed i rimanenti angoli ABC, ACB combaceranno co' rimanenti angoli DEF, DFE, e saranno quelli a questi rispettivamente uguali.

Se dunque due triangoli abbiano due lati uguali a due lati, ciascuno a ciascuno, ed abbiano anche uguali gli angoli compresi dai lati uguali: sarà pure la base uguale alla base, il triangolo uguale al triangolo, ed i rimanenti angoli saranno uguali ai rimanenti angoli, ciascuno a ciascuno, quelli cioè che sono sottesi dai lati uguali. C. B. D.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

In ogni triangolo isoscele gli angoli alla base sono uguali tra loro: e prodotti i lati uguali, saranno anche tra loro uguali gli angoli sotto la base.

Sia il triangolo isoscele ABC, che abbia il lato AB uguale al lato AC; e si prolunghino i lati AB, AC, verso D ed E: dico esser l' angolo ABC uguale all' angolo ACB, e l' angolo CBD all' angolo BCE. *fig.* 5.

Si prenda nella BD qualsivoglia punto F; poi dalla maggiore AE si tagli AG uguale alla minore AF, e si congiungano le linee rette FC, GB.

E poichè AF è uguale ad AG, ed AB ad AC; le due linee rette FA, AC sono uguali alle due GA, AB, ciascuna a ciascuna; comprendono anche l'angolo comune FAG: dunque la base FC è uguale alla base GB, ed i rimanenti angoli ACF, AFC sono uguali ai rimanenti angoli ABG, AGB ciascuno a ciascuno *. * p. 14.

Inoltre tutta AF è uguale a tutta AG, ed è AB uguale ad AC; dunque sarà la rimanente BF uguale alla rimanente CG *. Ma si è dimostrato esser FC uguale a GB: dunque i due lati BF, FC del triangolo BFC sono uguali ai due lati CG, GB del triangolo CGB, ciascuno a ciascuno; si è anche dimostrato l' angolo AFC uguale all' angolo AGB; sarà dunque il triangolo BFC uguale al triangolo CGB, ed i rimanenti angoli saranno uguali ai rimanenti angoli, ciascuno a ciascuno, quelli cioè * a. 3.

che sono sottesi dai lati uguali; perciò l' angolo FBC è uguale all' angolo GCB, e l' angolo BCF all' angolo CBG. Essendosi pertanto dimostrato esser tutto l' angolo ABG uguale a tutto l' angolo ACF, e la parte CBG del primo, uguale alla parte BCF dell' altro, saranno pure uguali le rimanenti parti, cioè gli angoli ABC ed ACB; i quali sono alla base del triangolo ABC. Ma si è anche dimostrato l' angolo FBC uguale all' angolo GCB, che sono quelli sotto la base.

Dunque in ogni triangolo isoscele gli angoli alla base sono uguali tra loro: e prodotti i lati uguali, saranno anche tra loro uguali gli angoli sotto la base. C.B.D.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Se due angoli d' un triangolo sieno tra loro uguali, i lati che sottendono gli angoli uguali, saran pure tra di loro uguali.

fig. 6. Sia il triangolo ABC, che abbia l' angolo ABC uguale all' angolo ACB: dico che il lato AC sia uguale al lato AB.

Poichè se AC non è uguale ad AB, un di essi sarà il maggiore. Sia questo AB, dal quale si tagli

* p. 3. la parte DB uguale al lato minore AC *, e si congiunga CD.

Ed essendo DB uguale ad AC, e BC comune; i due lati DB, BC del triangolo DBC sono uguali ai

due lati AC, CB del triangolo ACB, ciascuno a ciascuno. Ma è pure l'angolo DBC uguale all'angolo ACB: dunque il triangolo ABC sarà uguale al triangolo DCB *; il maggiore al minore, lo che è assurdo *. Non son dunque le AB ed AC disuguali, ma bensì uguali. * p. 4. * a. 9.

Perciò se due angoli di un triangolo sieno tra loro uguali, i lati che sottendono gli angoli uguali, saran pure tra di loro uguali. C. B. D.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Sopra di una stessa base ed alla medesima parte, non si possono costituire due triangoli distinti, che abbiano i lati uguali, ciascuno a ciascuno.

Imperocchè se può esserlo, alla stessa parte della linea retta AB vi sien costituiti i due triangoli distinti ACB, ADB, che abbiano uguali i lati, ciascuno a ciascuno, cioè il lato AC al lato AD, e 'l lato BC al lato BD. Si unisca CD, potrà una tal congiungente cadere o al di fuori di ciascuno dei triangoli ACB, ADB, o pur dentro di uno di essi. *fig.* 7.

Cada primieramente al di fuori. E poichè nel triangolo ACD i lati AC ed AD sono uguali, l'angolo ACD sarà uguale all'angolo ADC *; perciò l'angolo ADC è maggiore dell'angolo DCB, e quindi l'angolo CDB è molto maggiore dell'angolo DCB. Similmente perchè nel triangolo BCD il lato BC è uguale all'altro DB, l'angolo CDB sarà *n.* 1. * p. 5.

uguale all' angolo DCB. Ma si è anche dimostrato essergli maggiore. Dunque una grandezza sarebbe insieme maggiore ed uguale ad un'altra, il che è impossibile.

n. 2. Che se la CD si supponga cader dentro uno dei triangoli ACB; si producano le AC, AD in E ed F.

Or poichè nel triangolo CAD, i lati uguali AC, AD si sono prodotti in E ed F, sotto la base, sa-
* p. 5. rà l' angolo FDC uguale all'angolo ECD *. Ma per essere BC uguale a BD, l'angolo BCD è uguale all' angolo BDC; ed è l' angolo BDC maggiore dell' angolo FDC: dunque anche l'angolo BCD dovrà esser maggiore dell' angolo ECD; cioè la parte sarebbe maggiore del tutto, il che è impossibile.

E perciò sopra di una stessa base ed alla medesima parte, non si possono costituire due triangoli distinti, che abbiano i lati uguali, ciascuno a ciascuno. C. B. D.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Se due triangoli abbiano due lati uguali a due lati, ciascuno a ciascuno, ed abbiano di più la base uguale alla base: avranno uguali gli angoli compresi dai lati uguali.

fig. 8. I due triangoli ABC, DEF abbiano i due lati AB, AC, uguali ai due lati DE, DF, ciascuno a ciascuno, cioè AB a DE, ed AC a DF; ed abbia-

no pure la base BC uguale alla base EF : dico che anche l' angolo BAC, sia uguale all' angolo EDF.

Poichè se s'intenda applicato il triangolo ABC sul triangolo DEF, in modo che il punto B cada sul punto E, e la linea retta BC sulla EF; dovrà cadere il punto C sull' altro F, per essere BC uguale ad EF, e combaciando BC con EF, combaceranno anche BA, le CA colle ED, DF: poichè, se la base BC combacerà colla base EF, ed i lati BA, AC, non combacino coi lati ED, DF, ma cadano distintamente, come EG, GF, si verranno a costituire su di una stessa base, ed alla medesima parte due triangoli distinti, che hanno i lati uguali, ciascuno a ciascuno. Ma non vi si possono costituire * : dunque combaciando la base BC colla base EF, i lati BA, AC, debbono necessariamente combaciare colle ED, DF; e quindi l'angolo BAC combacerà coll' angolo EDF, e gli sarà perciò uguale *.

* p. 7.
* a. 8.

Se dunque due triangoli abbiano due lati uguali a due lati, ciascuno a ciascuno, ed abbiano di più la base uguale alla base: avranno anche uguali gli angoli compresi dai lati uguali. C. B. D.

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA.

Dato un angolo rettilineo, dividerlo per metà.

Sia dato l' angolo rettilineo BAC; fa d' uopo dividerlo per metà. *fig. 9.*

Si prenda nella linea retta AB ad arbitrio un

punto D, poi si tagli dalla linea retta AC la parte AE uguale ad AD, e si congiunga DE, sulla quale
* p. 1. si costituisca il triangolo equilatero DEF *, e si conduca AF: dico che l'angolo BAC è diviso per metà dalla AF.

Poichè AD è uguale ad AE, ed AF è comune; sono le due DA, AF uguali alle due EA, AF, ciascuna a ciascuna. Ma la base DF è ancora uguale alla base EF; quindi l'angolo DAF è ugua-
* p. 8. le all'angolo EAF *.

E perciò l'angolo rettilineo dato BAC è diviso per metà dalla linea retta AF. C. B. F.

PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA.

Data una linea retta terminata, dividerla per metà.

fig 10. Sia data la linea retta terminata AB; fa d'uopo dividerla per metà.

Si costituisca su di essa il triangolo equilatero ACB, e si divida l'angolo ACB per metà colla linea retta
* p. 9. CD *: dico che anche la linea retta AB sia divisa per metà nel punto D.

Poichè AC è uguale a CB, e CD è comune, saranno le due AC, CD uguali alle due BC, CD, ciascuna a ciascuna. Ma anche l'angolo ACD è uguale all'angolo BCD; dunque la base AD è
* p. 4. uguale alla base DB *.

Quindi la data linea retta terminata AB, si è divisa per metà nel punto D. C. B. F.

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA.

Ad una data linea retta da un dato punto in essa, condurle una perpendicolare.

Sia data la linea retta AB, ed in essa il punto C: fa d' uopo condurre dal punto C una perpendicolare ad AB. *fig. 11.*

Si prenda in AC un qualsivoglia punto D, indi si ponga CE uguale a CD; si costituisca sulla DE il triangolo equilatero FDE, e si tiri FC: dico che alla data linea retta AB, dal punto C dato in essa, le si sia condotta la perpendicolare FC.

Poichè CD è uguale a CE, ed FC è comune; le due CD, CF sono uguali alle due EC, CF, ciascuna a ciascuna. Ma anche la base DF è uguale alla base EF; dunque l' angolo DCF è uguale all'angolo ECF *, i quali sono gli angoli di quà e di là. Or quando una linea retta insistendo sopra di un' altra linea retta, forma uguali gli angoli, che sono di quà e di là, ciascuno degli angoli uguali è retto; dunque è retto ciascuno degli angoli DCF; FCE. * p. 8.

Quindi alla data linea retta AB, dal punto C dato in essa, le si è condotta la perpendicolare FC.C.B.F.

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA.

Da un dato punto fuori di una linea retta indeterminata, abbassarle sopra una perpendicolare.

fig. 12. Sia la data linea retta indeterminata AB, e C il punto dato, che non è in essa: fa d'uopo abbassare dal dato punto C una perpendicolare alla data AB.

Si prenda dall'altra parte della linea retta AB un qualunque punto D, e poi col centro C, intervallo CD, si descriva il cerchio EFG; indi si divida
* p. 10. EG per metà in H *, e si tirino le CG, CH, CE: dico che sulla data linea retta indeterminata AB, dal dato punto C, che non è in essa, si è abbassata la perpendicolare CH.

Imperocchè essendo GH uguale ad HE, e CH comune; sono le due GH, HC uguali alle due EH, HC, ciascuna a ciascuna. Ma anche la base CG è uguale alla base CE; dunque l'angolo CHG
* p. 8. è uguale all'angolo EHC *: i quali sono di quà e di là. Or quando una linea retta insistendo su di un' altra fa uguali gli angoli di quà e di là, è retto l'uno, e l'altro di questi angoli uguali, e la linea retta che insiste si chiama perpendicolare a quella
* d. 10. su cui insiste *.

Dunque dal dato punto C fuori della linea retta indeterminata AB, si è abbassata sopra essa la perpendicolare CH. C. B. F.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Quando una linea retta insistendo sopra un'altra linea retta vi forma angoli, gli farà amendue retti, o presi insieme uguali a due retti.

Una qualunque linea retta AB insistendo sopra l'altra CD, vi formi gli angoli CBA, ABD: dico, che questi angoli, o sono ambedue retti, o presi insieme uguali a due retti. *fig.* 13.

Imperocchè se l'angolo CBA, è uguale all'angolo ABD, sono questi due angoli retti *: se ciò non è, dal punto B si conduca BE perpendicolare a CD *; saranno perciò retti gli angoli CBE, EBD. E poichè l'angolo CBE è uguale ai due angoli CBA, ABE: se si aggiunga ad essi di comune l'angolo EBD; gli angoli CBE, EBD saranno uguali ai tre altri angoli CBA, ABE, EBD. Similmente, poichè l'angolo DBA è uguale agli angoli DBE, EBA: se si aggiunga ad essi di comune l'angolo ABC; gli angoli DBA, ABC saranno uguali ai tre altri angoli DBE, EBA, ABC. Ma si sono dimostrati anche gli angoli CBE, EBD uguali a questi stessi tre; e le grandezze uguali ad una terza, sono uguali tra di loro *; quindi è, che gli angoli CBE, EBD sono uguali agli angoli DBA, ABC. Ma gli angoli CBE, EBD sono due retti; perciò anche gli angoli DBA, ABC debbono essere uguali a due retti.

* d. 10.
* p. 11.
* d. 1.

Se dunque una linea retta ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Se ad un punto di una linea retta, due altre linee rette alle parti opposte di quella, facciano gli adjacenti angoli insieme uguali a due retti; queste fig. 14. *due linee rette saranno per dritto.*

Al punto B nella linea retta AB, le due altre linee rette BC, BD alle parti opposte di essa AB, vi facciano gli adjacenti angoli ABC, ABD insieme uguali a due retti: dico che la linea retta BD sia per dritto colla BC.

Imperocchè se BD non è per dritto con BC, sia con BC per dritto BE. E poichè la linea retta AB insiste sull' altra CBE; gli angoli ABC, * p. 13. ABE sono uguali a due retti *. Ma anche gli angoli ABC, ABD sono uguali a due retti: dunque gli angoli CBA, ABE sono uguali agli angoli CBA, ABD: tolgasi di comune l' angolo CBA; il rimanente angolo ABE dovrà essere uguale al rimanente * a. 13. ABD *; la qual cosa è impossibile. E perciò la linea retta BE non è per dritto colla BC. Dimostreremo similmente, che verun' altra lo sia, oltre BD: quindi la linea retta BC è per dritto con BD. Se dunque ad un punto di una linea retta ec. C.B.D.

Cor. In questo stesso modo si potrà dimostrare, che due linee rette non possono avere un comune segmento. Poichè se le CBD, CBE avessero il comune segmento CB; la retta BA insistente ad esse, e tirata dal punto B, dovrebbe comprendere colle BE, BD angoli uguali: lo che si dimostra impossibile collo stesso ragionamento della Proposizione precedente.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Se due linee rette scambievolmente si seghino; gli angoli verticali saranno uguali.

Le due linee rette AB, CD scambievolmente si seghino nel punto E: dico che l'angolo AEC sia uguale all' angolo DEB, e l' angolo CEB all' altro AED. *fig.* 15.

La linea retta AE insistendo sopra CD, vi forma gli angoli CEA, AED; perciò questi sono uguali a due retti *. Per la stessa ragione la linea retta DE insistendo sopra AB, vi forma gli angoli AED, DEB, che debbono anche essere uguali a due retti. Ma si sono dimostrati gli angoli CEA, AED anche uguali a due retti; sono dunque gli angoli CEA, AED uguali agli angoli AED, DEB; tolgasi di comune l' angolo AED; il rimanente angolo CEA sarà uguale al rimanente BED. Nel modo stesso si dimostrerà, che gli angoli CEB, DEA sieno uguali.

* p. 13.

Se dunque due linee rette scambievolmente si seghino; gli angoli verticali saranno uguali. C.B.D.

Cor. 1. Si rileva da ciò, che segandosi scambievolmente due linee rette, gli angoli alla sezione saranno uguali a quattro retti.

Cor. 2. E che tutte le linee rette concorrenti ad un punto, fanno gli angoli uguali a quattro retti.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

Se un lato di un triangolo sia prolungato, l' angolo esteriore è maggiore dell' uno, o dell' altro interiore ed opposto.

fig. 16. Sia il triangolo ABC, di cui il lato BC si prolunghi in D: dico che l' angolo esteriore ACD sia maggiore dell' uno, o dell' altro interiore ed opposto CBA, BAC.

* p. 10. Si divida BC per metà in E *, e tirata BE si prolunghi sino ad F, e si ponga EF uguale a BE; di poi si tiri FC, e si prolunghi AC sino a G.

E poichè AE è uguale ad EC, e BE ad EF, le due AE, EB sono uguali alle due CE, EF; ciascuna a ciascuna. Ma anche l'angolo AEB è uguale
* p. 15. all' angolo FEC, perchè verticali *: perciò i rimanenti angoli sono uguali ai rimanenti angoli, ciascuscuno a ciascuno, quelli cioè che sono sottesi dai
* p. 4. lati uguali *. È dunque l' angolo BAE uguale all' angolo ECF. Ma è poi l' angolo ECD maggiore dell' angolo ECF: quindi l' angolo ACD è maggiore dell' angolo BAE. Nel modo stesso, se BC si divida per metà, si dimostrerà che l' angolo BCG, cioè l' altro ACD, è maggiore dell' angolo ABC.

E perciò se un lato di un triangolo sia prolungato, l' angolo esteriore è maggiore dell'uno, o dell' altro interiore ed opposto. C.B.D.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Due angoli qualunque di ogni triangolo, presi insieme, sono minori di due retti.

Sia il triangolo ABC: dico che due angoli qualunque di un tal triangolo, presi insieme, sono minori di due retti. *fig.* 17.

Si prolunghi BC fino a D: e poichè del triangolo ABC l'angolo esteriore ACD è maggiore dell'interiore ed opposto ABC *; se vi si aggiunga di comune l'angolo ACB, saranno gli angoli ACD, AOB, maggiori degli angoli ABC, BCA. Ma gli angoli ACD, ACB sono uguali a due retti *: perciò gli angoli ABC, BCA sono minori di due retti. Similmente dimostreremo, che gli angoli BAC, ABC sieno minori di due retti, e lo stesso per gli angoli CAB, BCA.

* p. 15.
* p. 13.

Quindi due angoli qualunque di ogni triangolo, presi insieme, sono minori di due retti. C.B.D.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Il lato maggiore di ogni triangolo, sottende l'angolo maggiore.

Sia il triangolo ABC, che abbia il lato AC maggiore del lato AB: dico che anche l'angolo ABC sia maggiore dell'angolo BCA. *fig.* 18

Perchè il lato AC è maggiore del lato AB; pongasi AD uguale ad AB, e si tiri BD. E poichè l'angolo esteriore ADB del triangolo BDC, è mag-
* p. 17. giore dell'interiore ed opposto DCB *; ed è l'angolo ADB uguale all'angolo ABD; perchè il la-
* p. 5. to AB è uguale al lato AD *: dovrà perciò l'angolo ABD esser maggiore dell'angolo ACB; e quindi l'angolo ABC dovrà esser molto maggiore dell'angolo ACB.

Dunque il maggior lato di ogni triangolo, sottende l'angolo maggiore. C. B. D.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

Il maggior angolo di ogni triangolo, è sotteso dal lato maggiore.

fig. 19. Sia il triangolo ABC, che abbia l'angolo ABC maggiore dell'angolo BCA: dico che anche il lato AC sia maggiore del lato AB.

Imperocchè se ciò non è vero; il lato AC, o è uguale al lato AB, o n'è minore. Non è il lato AC uguale al lato AB, poichè sarebbe l'angolo ABC
* p. 5. uguale all'altro ACB *, il che non è vero; non è dunque AC uguale ad AB. Non è poi AC minore di AB; poichè l'angolo ABC sarebbe minore del-
* p. 18. l'altro ACB *, il che nè anche è vero; dunque neppure AC è minore di AB. Ma si è dimostrato, che non gli è uguale: dovrà perciò essere AC maggiore di AB.

Quindi il maggior angolo di ogni triangolo, è sotteso dal lato maggiore. C. B. D.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

Due lati qualunque di ogni triangolo, presi insieme, sono maggiori del rimanente.

Sia il triangolo ABC: dico che due lati di un tal triangolo, insieme presi, sono maggiori del rimanente; cioè BA, AC di BC; AB, BC di AC; BC, CA di AB. *fig. 20.*

Imperocchè si prolunghi BA sino al punto D, poi si ponga DA uguale a CA, e si congiunga DC.

E poichè DA è uguale ad AC, è pure l' angolo ADC uguale all' angolo ACD *. Ma l' angolo BCD è maggiore dell' altro ACD: dunque BCD è anche maggiore di ADC. E perchè il triangolo DCB ha l' angolo DCB maggiore dell' altro ADC, ed il maggior angolo è sotteso dal maggior lato: quindi DB è maggiore di BC *. Ma è poi DB uguale alle AB, AC: sono dunque le BA, AC maggiori di BC. Similmente dimostreremo, che le AB, BC sono maggiori di CA; e che le BC, CA sono maggiori di AB.

* p. 5.

* p. 19.

Perciò due lati qualunque di ogni triangolo, presi insieme, sono maggiori del rimanente. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

Se dagli estremi di un lato di un triangolo, conducansi due linee rette ad un punto dentro di tal figura; queste saranno minori dei due altri lati del triangolo, e vi comprenderanno un angolo maggiore di quello, che contiensi da que' due lati.

fig. 21. Dagli estremi B, C del lato BC del triangolo ABC, conducansi ad un punto dentro di tal figura le due linee rette BD, DC: dico che le BD, DC sieno minori dei due altri lati BA, AC di esso triangolo; ma che comprendano l'angolo BDC maggiore dell'angolo BAC.

Imperocchè si prolunghi BD sino ad E: e siccome di ogni triangolo due lati sono maggiori del terzo *; perciò i due lati AB, AE del triangolo ABE sono maggiori dell'altro BE; vi si aggiunga di comune EC; sono dunque le BA, AC maggiori delle BE, EC. E similmente poichè del triangolo CED i lati CE, ED sono maggiori dell'altro CD *; vi si aggiunga di comune DB; sono dunque le CE, EB maggiori delle CD, DB. Ma le BA, AC si sono dimostrate maggiori delle BE, EC: quindi le BA, AC sono molto maggiori delle BD, DC.

* p. 20.

Inoltre poichè l'angolo esteriore di qualsivoglia triangolo è maggiore dell'interiore ed opposto *; perciò l'angolo esteriore BDC del triangolo CDE è maggiore dell'altro CED. Per la stessa ragione,

* p. 16.

l'angolo esteriore CEB del triangolo ABE è maggiore dell'altro BAC. Ma si è dimostrato BDC maggiore di BEC: dunque BDC è molto maggiore di BAC.

Quindi se dagli estremi di un lato di un triangolo, conducansi due linee rette ad un punto dentro di tal figura; queste sono minori degli altri due lati del triangolo, comprendono però un angolo maggiore di quello, che contiensi da que' due lati C.B.D.

PROPOSIZIONE XXII.

PROBLEMA.

Da tre linee rette, le quali sieno uguali a tre altre date, costituire un triangolo; richiedesi però che due, comunque prese, sieno maggiori della terza.

Le tre linee rette date sieno A, B, C, due delle quali, comunque prese, sieno maggiori della terza: cioè A, e B di C; A, e C di B; ed ancora B, e C di A: fa d'uopo costituire un triangolo con tre linee rette uguali alle A, B, C. *fig. 22.*

Si ponga la linea retta DE, terminata in D, ed interminata in E; dalla quale si tagli DF uguale ad A, FG uguale a B, e GH a C *. Col centro F, intervallo FD si descriva il cerchio DKL: e similmente col centro G, intervallo GH si descriva il cerchio HKM, e si tirino le KF, KG: dico che il triangolo KGF sia costitnito da tre linee rette uguali alle A, B, C. * p. 3.

Poichè il punto F è centro del cerchio DKL, FD è uguale ad FK. Ma FD è uguale ad A: dunque KF è uguale ad A. Per la stessa ragione, poichè il punto G è centro del cerchio KMH, GH è uguale a GK; è poi GH uguale a C: dunque GK è pure uguale a C. Ma a B si è posto uguale FG; quindi le tre KF, FG, GK sono uguali alle tre A, B, C.

E perciò dalle tre linee rette KF, FG, GK, che sono uguali alle tre altre date A, B, C, si è costituito il triangolo KFG. C. B. F.

PROPOSIZIONE XXIII.

PROBLEMA.

Ad una data linea retta, ed ad un punto in essa, costituire un angolo rettilineo uguale ad un altro dato.

fig. 23. Sia data la linea retta AB, ed in essa il punto A, sia poi dato l' angolo rettilineo DCE: fa d' uopo alla data linea retta AB, ed al punto A in essa, costituire un angolo rettilineo uguale all' altro DCE dato.

Prendansi nell' una, e nell' altra linea retta CD, CE i punti D, E, e si tiri DE: poi da tre linee
* p. 22. rette, che sono uguali alle tre CD, DE, CE *, si costituisca il triangolo AFG, in modo che sia CD uguale ad AF, CE ad AG, ed anche DE ad FG.

E poichè le due linee rette DC, CE sono uguali alle due altre FA, AG, ciascuna a ciascuna, e la base DE è uguale alla base FG; l'angolo DCE do-
* p. 8. vrà essere uguale all' angolo FAG. *

Quindi alla data linea retta AB, ed al punto A dato in essa, si è costituito l'angolo rettilineo FAG uguale all'altro dato DCE. C. B. F.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

Se due triangoli abbiano due lati uguali a due lati, ciascuno a ciascuno: ma l'angolo contenuto dai lati di uno di essi, sia maggiore dell'angolo contenuto dagli uguali lati dell'altro; sarà la base di quello maggiore della base di questo.

Sieno i due triangoli ABC, DEF, i quali abbiano i due lati AB, AC uguali ai due lati DE, DF, ciascuno a ciascuno, cioè AB a DE, ed AC a DF; l'angolo BAC poi, sia maggiore dell'angolo EDF: dico che la base BC sia maggiore della base EF. *fig.* 24.

Poichè l'angolo BAC è maggiore dell'angolo EDF, si costituisca alla linea retta DE, ed al punto D in essa l'angolo EDG uguale all'angolo BAC *, pongasi DG uguale ad AC, o a DF, e si tirino le GE, FG. E poichè AB è uguale a DE, ed AC a DG; le due BA, AC sono uguali alle due ED, DG, ciascuna a ciascuna; anche l'angolo BAC è uguale all'angolo EDG; dunque la base BC è uguale alla base EG *. Similmente, poichè DG è uguale a DF, anche l'angolo DFG è uguale all'angolo DGF *; e quindi DFG è maggiore di EGF: e perciò EFG è molto maggiore

* p. 23.
* p. 4.
* p. 5.

di EGF. E poichè EFG è un triangolo, che ha l' angolo EFG maggiore dell' angolo EGF; ed il
* p. 19. maggior angolo è sotteso dal lato maggiore *: dunque il lato EG è maggiore dell' altro EF. Ma GE è uguale a BC: dunque BC è maggiore di EF.

Quindi se due triangoli abbiano due lati uguali a due lati, ciascuno a ciascuno: ma l' angolo contenuto dai lati di uno di essi, sia maggiore dell' angolo contenuto dagli uguali lati dell' altro; sarà la base di quello maggiore della base di questo. C.B.D.

PROPOSIZIONE. XXV.

TEOREMA.

Se due triangoli abbiano due lati uguali a due lati, ciascuno a ciascuno: ma la base di uno sia maggiore della base dell' altro; l' angolo contenuto dai lati di quello, che ha maggiore la base, sarà maggiore dell' angolo contenuto dagli uguali lati dell' altro.

fig. 25. Sieno i due triangoli ABC, DEF, i quali abbiano i due lati AB, AC uguali ai due lati DE, DF, ciascuno a ciascuno, cioè il lato AB al lato DE, ed il lato AC al lato DF; ma la base BC sia maggiore della base EF: dico che l' angolo BAC sia maggiore dell' angolo EDF.

Poichè se non sia maggiore, o è a quello uguale, o n'è minore. Ma non è l' angolo BAC uguale all' angolo EDF; poichè allora sarebbe la base BC
* p. 4. uguale alla base EF *, il che non è vero: dunque

l'angolo BAC non è uguale all'angolo EDF. Nè parimente n' è minore; poichè sarebbe la base BC minore della base EF *, il che nè anche è vero: dunque l' angolo BAC non è minore dell' angolo EDF. Si è poi dimostrato, che non gli è uguale: perciò l' angolo BAC è maggiore dell' angolo EDF.

* p. 24.

Per la qual cosa se due triangoli abbiano due lati uguali a due lati, ciascuno a ciascuno: ma la base di uno sia maggiore della base dell' altro; l' angolo contenuto dai lati di quello, che ha maggiore la base, sarà maggiore dell' angolo contenuto dagli uguali lati dell' altro. C.B.D.

PROPOSIZIONE. XXVI.

TEOREMA.

Se due triangoli abbiano due angoli uguali a due angoli, ciascuno a ciascuno, ed un lato uguale ad un lato, cioè o quello, ch' è adjacente agli angoli uguali, o l'altro, che sottende uno degli angoli uguali; avranno ancora i rimanenti lati uguali ai rimanenti lati, ciascuno a ciascuno, ed il terzo angolo uguale al terzo angolo.

Sieno i due triangoli ABC, DEF, i quali abbiano i due angoli ABC, BCA uguali ai due DEF, EFD, ciascuno a ciascnno, cioè ABC a DEF, e BCA ad EFD; ed abbiano ancora un lato uguale ad un lato, il qual sia primieramente quello ch' è adjacente agli angoli uguali, cioè BC ad EF: di- *fig.* 26.

co che avranno ancora i rimanenti lati uguali ai rimanenti lati, ciascuno a ciascuno, cioè AB a DE ed AC a DF, ed il terzo angolo BAC uguale al terzo angolo EDF.

Imperocchè se il lato BA non è uguale all' altro DE, un di essi sarà il maggiore. Sia AB il maggiore: si ponga GB uguale ad ED, e si unisca GC. E poichè BG è uguale a DE, e BC ad EF; i due lati GB, BC sono uguali ai due DE, EF, ciascuno a ciascuno: è anche l' angolo GBC uguale all' angolo DEF; dunque la base GC è uguale alla base DF, il triangolo GBC è uguale al triangolo DEF, ed i rimanenti angoli sono uguali ai rimanenti angoli, ciascuno a ciascuno,
* p. 4. quelli cioè che sono sottesi dai lati uguali *. È dunque l' angolo GCB uguale all' angolo DFE. Ma l' angolo DFE si è posto uguale all' angolo ACB: quindi l' angolo BCG è uguale all' angolo BCA; il minore al maggiore, il che è impossibile. Non è dunque AB ineguale a DE; e perciò gli è uguale È poi BC uguale ad EF; quindi i due lati AB, BC sono uguali ai due altri DE, EF, ciascuno a ciascuno: è anche l' angolo ABC uguale all' angolo DEF; dunque la base AC è uguale alla base DF,
* p. 4. ed il terzo angolo BAC è uguale al terzo EDF *.

Sieno poi uguali i lati, che sottendono gli angoli uguali, cioè AB a DE: similmente dico, che i rimanenti lati saranno uguali ai rimanenti lati, cioè AC a DF, e BC ad EF, e che anche il terzo angolo BAC sarà uguale al terzo EDF.

Imperocchè se il lato BC non sia uguale al lato EF; un di essi sarà il maggiore. Sia, s' è pos-

sibile, BC il maggiore; si ponga BH uguale ad EF, ed uniscasi AH. E poichè BH è uguale ad EF, ed AB a DE; i due lati AB, BH sono uguali ai due lati DE, EF, ciascuno a ciascuno. Ma comprendono ancora angoli uguali; dunque la base AH è uguale alla base DF, il triangolo ABH è uguale al triangolo DEF, ed i rimanenti angoli sono uguali ai rimanenti angoli, ciascuno a ciascuno, quelli cioè che sono sottesi dai lati uguali. Quindi l' angolo BHA è uguale all' altro EFD. Ma l'angolo EFD è uguale all'angolo BCA: dunque l' angolo BHA è uguale all' altro BCA; cioè a dire del triangolo ACH, l' angolo esteriore BHA è uguale all' interiore ed opposto BCA, il che è impossibile. Non è dunque BC ineguale ad EF; ma uguale. È poi AB uguale a DE: perciò i due lati AB, BC souo uguali ai due lati DE, EF, ciascuno a ciascuno; comprendono pure angoli uguali; dunque la base AC è uguale alla base DF; il triangolo ABC è uguale al triangolo DEF, ed il terzo angolo BAC è uguale al terzo angolo EDF.

Quindi se due triangoli abbiano due angoli uguali a due angoli, ciascuno a ciascnno, ed un lato uguale ad un lato, cioè o quello, ch' è adjacente agli angoli uguali, o l' altro, che sottende uno degli angoli uguali; avranno ancora i rimanenti lati uguali ai rimauenti lati, ciascuno a ciascuno, ed il terzo angolo uguale al terzo angolo, C.B.D.

PROPOSIZIONE. XXVII.

TEOREMA.

Se una linea retta cadendo sopra due altre linee rette, vi formi gli angoli alterni tra loro uguali; quelle due linee rette saranno parallele.

fig. 27 Nelle due linee rette AB, CD cadendovi la linea retta EF, formi tra loro uguali gli angoli alterni AEF, EFD: dico che AB sia parallela a CD.

Imperocchè se non l'è parallela, le AB, CD pro-
* d. 35 lungate converranno, o alla parte BD, o all'altra AC *: si prolunghino, e convengano alla parte BD nel punto G; sarà dunque GEF un triangolo; e perciò il suo angolo esteriore AEF è maggiore dell' interiore ed opposto EFG. Ma gli è anche uguale, il che è impossibile; quindi le AB, CD prolungate alla parte BD, non converranno. Similmente dimostreremo, che neppur convengano alla parte AC. Or quelle rette, che nè dall' una, nè dall' altra parte convengono sono parallele; è dunque AB parallela a CD.

E perciò se una linea retta cadendo sopra due altre linee rette, vi formi gli angoli alterni tra loro uguali; quelle due linee rette saranno parallele C.B.D.

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA.

Se una linea retta cadendo sopra due altre linee rette, vi formi l' angolo esteriore uguale all' interiore, ed opposto dalla parte stessa, o gl' interiori dalla medesima parte uguali a due retti; quelle due linee rette saranno parallele.

Nelle due linee rette AB, CD cadendovi la linea retta EF, formi l' angolo esteriore EGB uguale all' interiore, ed opposto dalla parte stessa GHD; o gl' interiori, dalla medesima parte BGH, GHD uguali a due retti: dico che AB sia parallela a CD. *fig.* 28.

Poichè l' angolo EGB è uguale all' altro GHD, ed EGB è pure uguale ad AGH, sarà anche AGH uguale a GHD. Ma questi sono alterni; dunque AB è parallela a CD *. * p. 27.

Similmente poichè gli angoli BGH, GHD sono uguali a due retti, e gli altri AGH, BGH sono pure uguali a due retti; saranno gli angoli AGH, BGH uguali agli altri BGH, GHD; se ne tolga di comune l' angolo BGH, sarà il rimanente AGH uguale al rimanente GHD. Ma questi sono alterni; dunque AB è parallela a CD.

E perciò se una linea retta cadendo sopra due altre linee rette, vi formi l'angolo esteriore uguale all'interiore, ed opposto dalla parte stessa, o gl' interiori alla

medesima parte uguali a due retti; quelle due linee rette saranno parallele . C.B.D.

PROPOSIZIONE. XXIX.

TEOREMA.

Se una linea retta cada sopra due linee rette parallele , vi formerà gli angoli alterni uguali tra loro , l' angolo esteriore uguale all' interiore , ed opposto dalla stessa parte , e gl' interiori dalla parte medesima uguali a due retti .

fig. 29. Cada la linea retta EF sulle linee rette parallele AB , CD : dico che essa vi formerà gli angoli alterni AGH , GHD uguali tra loro , l'esteriore EGB uguale all'interiore , ed opposto , dalla stessa parte GHD , e gl' interiori BGH , GHD dalla medesima parte uguali a due retti .

Imperocchè se AGH non è uguale a GHD ; un di essi è il maggiore , sia AGH il maggiore. E poichè l' angolo AGH è maggiore dell' altro GHD , vi si aggiunga di comune l' angolo BGH ; quindi gli angoli AGH , BGH sono maggiori degli altri BGH, GHD . Ma gli angoli AGH , BGH sono uguali a
* p. 13. due retti * ; dunque gli altri BGH , GHD sono minori di due retti. Or quelle linee rette , che intersegate da un' altra fanno con questa gli angoli interiori dalla stessa parte minori di due retti , prolungate indefinita-
* po. 5. mente debbono incontrarsi * ; perciò le linee rette AB, CD indefinitamente prolungate converranno . Ma non convengono , essendo parallele per supposizione ; non è dunque l' angolo AGH disuguale all' angolo GHD ,

e perciò gli è necessariamente uguale. È poi l' angolo AGH uguale all' angolo EGB, dunque anche EGB sarà uguale a GHD; vi si aggiunga di comune l'angolo BGH, saranno quindi gli angoli EGB, BGH uguali agli angoli BGH, GHD. Ma gli angoli EGB, BGH sono uguali a due retti *; dunque anche gli angoli BGH, GHD saranno uguali a due retti. * p. 13.

Per la qual cosa se una linea retta cada sopra due linee rette parallele, vi formerà gli angoli alterni uguali tra loro, l' angolo esteriore uguale all' interiore, ed opposto dalla parte stessa, e gl' interiori dalla medesima parte uguali a due retti. C.B.D.

PROPOSIZIONE. XXX

TEOREMA.

Quelle linee rette, che sono parallele ad una stessa linea retta, sono anche parallele tra loro.

Sia tanto AB, che CD parallela alla stessa EF: dico che anche AB sia parallela a CD. *fig. 30.*

Cada sopra esse la linea retta GK. E poichè nelle linee rette parallele AB, EF vi cade la linea retta GK, l' angolo AGH è uguale all'altro GHF *. Similmente poichè nelle linee rette parallele EF, CD vi cade la linea retta GK, l' angolo GHF è uguale all' altro GKD. * Ma si è ancora dimostrato l' angolo AGK uguale all'angolo GHF: quindi sarà pure AGK uguale a GKD; sono essi alterni: dunque AB è parallela a CD. * p. 29. * p. 29.

E perciò quelle linee rette, che sono parallele ad una stessa linea retta, sono anche parallele tra loro C.B.D.

PROPOSIZIONE XXXI.

PROBLEMA.

Per un dato punto, ad una data linea retta condurre una parallela.

fig. 31. Sia A il punto dato, e BC la linea retta data: fa d'uopo per lo punto A condurre una parallela alla linea retta BC.

Si prenda nella BC un punto D ad arbitrio, ed uniscasi AD; poi si costituisca alla linea retta DA, ed al punto A in essa l'angolo DAE uguale
* p. 23. all'altro ADC *, e si prolunghi EA in F.

E poichè nelle due linee rette BC, EF vi cade la linea retta AD, e fa gli angoli alterni EAD, ADC tra loro uguali, EF dovrà essere parallela a
* p. 27. BC *

Quindi per lo dato punto A, alla data linea retta BC si è tirata la parallela EAF. C.B.F.

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA.

In ogni triangolo se si prolunghi uno de' suoi lati, l' angolo esteriore è uguale ai due interiori , ed opposti : ed i tre angoli interiori del triangolo sono uguali a due retti .

Sia il triangolo ABC, ed un lato di esso BC si prolunghi in D: dico che l' angolo esteriore ACD sia uguale ai due interiori , ed opposti CAB, ABC: e che i tre angoli interiori ABC , BCA , CAB del triangolo sieno uguali a due retti . *fig.* 32.

Si tiri per lo punto C , alla linea retta AB la parallela CE * . E poichè AB è parallela a CE , ed in esse vi cade AC , gli angoli alterni BAC , ACE sono uguali tra loro * . Similmente poichè AB è parallela a CE , e vi cade in esse BD , l' angolo esteriore ECD è uguale all' interiore , ed opposto ABC * . Ma si è dimostrato ACE uguale a BAC ; perciò tutto l' angolo esteriore ACD è uguale ai due interiori , ed opposti BAC, ABC.

* p. 31.
* p. 29.
* p. 29.

Or vi si aggiunga di comune l' angolo ACB ; saranno i due angoli ACD , ACB uguali ai tre angoli ABC , BCA , CAB . Ma i due angoli ACD , ACB sono uguali a due retti : dunque anche i tre ACB, CBA , BAC sono uguali a due retti .

Quindi in ogni triangolo se si prolunghi uno dei

suoi lati, l' angolo esteriore è uguale ai due interiori, ed opposti: ed i tre angoli interiori del triangolo sono uguali a due retti. C.B.D.

PROPOSIZIONE. XXXIII.

TEOREMA.

Le linee rette, le quali congiungono l' estremità di due altre linee rette uguali, e parallele, verso la stessa parte sono ancor esse uguali, e parallele.

fig. 33. Sieno uguali, e parallele le linee rette AB, CD, e le congiungano verso la parte stessa le altre linee rette AC, BD: dico che queste AC, BD sono ancor esse uguali, e parallele.

Si unisca BC. E poichè AB è parallela a CD, ed in esse vi cade BC, gli angoli alterni ABC, BCD sono uguali *. Per la qual cosa essendo AB uguale a CD, e BC comune, le due AB, BC sono uguali alle due BC, CD, ciascuna a ciascuna; ed è anche l' angolo ABC uguale all' angolo BCD: dunque la base AC è uguale alla base BD, il triangolo ABC è uguale al triangolo BCD, ed i rimanenti angoli sono uguali ai rimanenti angoli, ciascuno a ciascuno, cioè quelli che sono sottesi dai lati uguali. Quindi l' angolo ACB è uguale all' angolo CBD. E poichè nelle due linee rette AC, BD vi cade la linea retta BC, e fa uguali tra loro gli angoli alterni ACB, CBD, AC sarà parallela a BD. Ma le si è pure dimostrata uguale.

* p. 29.

Dunque le linee rette le quali congiungono l'estremità di due altre linee rette uguali, e parallele, verso la stessa parte, sono ancor esse uguali, e parallele. C.B.D.

PROPOSIZIONE. XXXIV.

TEOREMA.

I lati, e gli angoli opposti di ogni parallelogrammo sono uguali tra loro; ed il diametro o divide per metà.

N. B. La voce *parallelogrammo* è stata adottata da Euclide, per dinotare una figura quadrilatera, che ha gli opposti lati paralleli.

Sia il parallelogrammo ACDB, e BC il suo diametro: dico che di un tal parallelogrammo i lati opposti, e gli angoli opposti sono uguali tra loro, e che il diametro BC lo divide per metà fig. 34.

E poichè AB è parallela a CD, e cade in esse la linea retta BC, gli angoli alterni ABC, BCD sono tra di loro uguali *: similmente poichè AC è parallela a BD, e cade in esse BC, gli angoli alterni ACB, CBD sono pure tra di loro uguali. Quindi sono ABC, CBD due triangoli, i quali hanno due angoli ABC, BCA uguali ai due altri angoli BCD, CBD, ciascuno a ciascuno, ed un lato uguale ad un lato, quello ch'è adjacente agli angoli uguali, cioè BC, ch'è comune ad entrambi: dunque avranno i rimanenti lati uguali ai rimanenti lati, ciascuno a ciascuno ed il terzo angolo uguale al terzo angolo: perciò il lato AB è uguale al lato CD, il lato AC al lato BD; e l'angolo BAC all'angolo BCD. E poichè l'angolo ABC è u-

* p. 29.

guale all' altro BCD , e l' angolo CBD all' angolo ACB ; sarà tutto l' angolo ABD uguale a tutto l'altro ACD . Ma si è pure dimostrato l' angolo BAC uguale all' angolo BDC . Dunque i lati , e gli angoli opposti di ogni parallelogrammo sono uguali tra loro .

Dico anche , che il diametro lo divide per metà. Poichè essendo AB uguale a CD , e BC comune, sono le due AB , BC uguali alle due DC , CB , ciascuna a ciascuna . Ma l' angolo ABC è uguale all' angolo BCD ; dunque il triangolo ABC sarà uguale al
* p. 4. triangolo BCD * : e perciò il diametro BC divide per metà il parallelogrammo ACDB . C.B.D.

PROPOSIZIONE XXXV.

TEOREMA.*

I parallelogrammi costituiti sopra la stessa base , e tra le medesime parallele , sono uguali tra loro

fig. 35. Sieno i parallelogrammi ABCD , EBCF costituiti sopra la stessa base BC , e tra le medesime parallele AF , BC : dico che il parallelogrammo ABCD sia uguale al parallelogrammo EBCF .

E poichè ABCD è un parallelogrammo , AD è ugua-
* p. 34. le a BC * , e per la stessa ragione EF è uguale a BC ; quindi AD sarà uguale ad EF : è poi DE comune ; dunque tutta AE è uguale a tutta DF . Ma è anche AB uguale a DC : quindi le due EA , AB sono uguali alle due FD , DC , ciascuna a ciascuna ; è poi l'angolo esteriore FDC uguale all' interiore , ed-

opposto EAB: dunque il triangolo EAB è uguale al triangolo FDC. Or se ne tolga di comune il triangolo DGE, sarà il rimanente trapezio ABGD uguale al rimanente trapezio EGCF; e perciò se vi si aggiunga di comune il triangolo GBC, sarà tutto il parallelogrammo ABCD uguale a tutto il parallelogrammo EBCF.

Laonde i parallelogrammi costituiti sopra la stessa base, e tra le medesime parallele, sono uguali tra loro. C.B.D.

PROPOSIZIONE XXXVI.

TEOREMA.

I parallelogrammi costituiti sopra uguali basi, e tra le medesime parallele, sono uguali tra loro.

Sieno i parallelogrammi ABCD, EFGH costituiti sopra le uguali basi BC, FG, e tra le medesime parallele BG, AH: dico che il parallelogrammo ABCD sia uguale al parallelogrammo EFGH. *fig.* 36.

Si congiungano le BE, CH. E poichè BC è uguale ad FG, ed FG ad EH, sarà BC uguale ad EH; sono poi parallele, e congiunte verso la medesima parte dalle linee rette BE, CH. Ma quelle, che congiungono le uguali, e parallele, verso la stessa parte, sono uguali, e parallele: dunque EB, e CH sono uguali, e parallele *; e perciò EBCH è un parallelogrammo; ed è inoltre uguale al parallelogrammo ABCD, poichè ha con questo la stessa base BC, ed è costituito tra le medesime parallele BC, ed AH. * Per

* p. 33.
* p. 35.

la stessa ragione anche il parallelogrammo EFGH è uguale allo stesso parallelogrammo EBCH: quindi il parallelogrammo ABCD è uguale al parallelogrammo EFGH.

E perciò i parallelogrammi costituiti sopra uguali basi, e tra le medesime parallele, sono uguali tra loro. C.B.D.

PROPOSIZIONE. XXXVII.

TEOREMA.

I triangoli costituiti sopra le base stessa, e tra le medesime parallele, sono uguali tra loro.

fig. 37. Sieno i triangoli ABC, DBC costituiti sopra la stessa base BC, e tra le medesime parallele AD, BC: dico che il triangolo ABC sia uguale al triangolo DBC.

Si prolunghi AD dall' una, e dall' altra parte verso E, ed F; ed indi per B si tiri a CA la parallela BE, e per C a BD la parallela CF. E perciò ciascuna di queste figure EBCA, DBCF è un parallelogrammo. È poi EBCA uguale a DBCF, essendo parallelogrammi sopra la stessa base BC, e
* p. 35. tra le medesime parallele BC, EF *: ed il triangolo ABC è metà del parallelogrammo EBCA,
* p. 34. giacchè questo è diviso per metà dal diametro AB *: siccome parimente il triangolo DBC è metà del parallelogrammo DBCF, perciocchè anche questo è diviso per metà dal diametro DC. Or le metà di
* a. 7. grandezze uguali sono tra loro uguali *: dunque il triangolo ABC è uguale al triangolo DBC.

E perciò i triangoli costituiti sopra la base stessa, e tra le medesime parallele, sono uguali tra loro C.B.D.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

TEOREMA.

I triangoli costituiti sopra basi uguali, e tra le medesime parallele, sono uguali tra loro.

Sieno i triangoli ABC, DEF costituiti sopra le uguali basi BC, EF, e tra le medesime parallele BF, AD: dico che il triangolo ABC sia uguale al triangolo DEF.

Imperciocchè si prolunghi AD dall' una, e dall' altra parte nei punti G, ed H: indi si conduca per B a CA la parallela BG, e per F la FH parallela a DE. È quindi un parallelogrammo ciascuna di queste figure GBCA, DEFH; ed è poi il parallelogrammo GBCA uguale al parallelogrammo DEFH, poichè sono sopra le basi uguali BC, EF, e tra le medesime parallele BF, GH *: ed il triangolo ABC è metà del parallelogrammo GBCA, giacchè il diametro AB lo divide per metà; siccome parimente il triangolo DEF è metà del parallelogrammo DEFH, perciocchè anche il diametro DF lo divide per metà. Or quelle grandezze, che sono metà di altre uguali, sono uguali tra loro; è dunque il triangolo ABC uguale al triangolo DEF.

fig. 38.

* p. 36.

E perciò i triangoli costituiti sopra basi uguali,

e tra le medesime parallele, sono uguali tra loro C.B.D.

PROPOSIZIONE XXXIX.

TEOREMA.

I triangoli uguali costituiti sopra la stessa base, e verso la parte stessa, sono anche tra le medesime parallele.

fig. 39. Sieno i triangoli uguali ABC,DBC costituiti sopra la stessa base BC, e verso la parte stessa: dico, che AD sia parallela a BC.

Poichè, se non l'è parallela; si tiri dal punto A
* p. 31. a BC la parallela AE *, e si unisca EC: è dunque il triangolo ABC uguale al triangolo EBC, essendo costituiti sopra la stessa base BC, e tra le
* p. 37. medesime parallele BC,AE *. Ma il triangolo ABC è uguale all'altro DBC; dunque il triangolo DBC è anche uguale al triangolo EBC: cioè il maggiore al minore, il che è impossibile. Non è dunque AE parallela a BC. Dell' istessa maniera si può dimostrare, che niun' altra lo sia, oltre AD; perciò AD è parallela a BC.

Per la qual cosa i triangoli uguali costituiti sopra la base stessa, e verso la parte stessa, sono anche tra le medesime parallele. C.B.D.

PROPOSIZIONE XL.

TEOREMA.

I triangoli uguali costituiti sopra uguali basi, poste per dritto, *e verso la parte stessa*, *sono anche tra le medesime parallele.*

Sieno gli uguali triangoli ABC, CDE costituiti sopra le uguali basi BC, CE, *poste per dritto*, e verso la parte stessa: dico che sieno anche tra le medesime parallele; cioè che congiunta AD, debba questa esser parallela a BE. *fig. 40.*

Imperciocchè se non l'è parallela, si tiri per A la AF parallela a BE *, e si unisca EF. È dunque il triangolo ABC uguale al triangolo FCE, essendo essi costituiti sopra uguali basi, e tra le medesime parallele BE, AF *. Ma il triangolo ABC è uguale al triangolo DCE; dunque il triangolo DCE sarà uguale al triangolo FCE: cioè il maggiore al minore, il che è impossibile. Non è dunque AF parallela a BE. Dell'istessa maniera si può dimostrare, che verun'altra lo sia, oltre AD; perciò AD è parallela a BE.

* p. 31.

* p. 38.

Per la qual cosa i triangoli uguali costituiti sopra uguali basi, *poste per dritto*, e verso la parte stessa, sono anche tra le medesime parallele. C.B.D.

PROPOSIZIONE XLI.

TEOREMA.

Se un parallelogrammo, ed un triangolo sieno sopra la stessa base, e tra le medesime parallele; il parallelogrammo sarà doppio del triangolo.

fig. 41. Sieno il parallelogrammo ABCD, ed il triangolo EBC costituiti sopra la stessa base BC, e tra le medesime parallele BC, AE: dico che il parallelogrammo ABCD sia doppio del triangolo EBC.

Imperciocchè, congiunta AC, sarà il triangolo ABC uguale al triangolo EBC, essendo essi costituiti sopra la stessa base BC, e tra le medesime
* p. 37. parallele BC, AE *. Ma il parallelogrammo ABCD è doppio del triangolo ABC; perciocchè il diametro
* p. 34. AC lo divide per metà *: dunque lo stesso ABCD
* a. 6. sarà anche doppio del triangolo EBC *.

E perciò se un parallelogrammo, ed un triangolo sieno sopra la stessa base, e tra le medesime parallele, il parallelogrammo sarà doppio del triangolo. C.B.D.

PROPOSIZIONE XLII.

PROBLEMA.

Descrivere un parallelogrammo, che sia uguale ad un dato triangolo, ed abbia uno de' suoi angoli uguale ad un dato angolo rettilineo.

Sia dato il triangolo ABC, e l'angolo rettilineo D: fa d'uopo descrivere un parallelogrammo, che sia uguale al dato triangolo ABC, e che abbia uno de' suoi angoli uguale al dato D. *fig.* 42.

Si divida BC per metà in E, ed unita AE, si costituisca alla linea retta EC, ed al punto E in essa l'angolo CEF uguale all' altro D *; poi per A si tiri AG parallela ad EC, e per C, CG parallela ad FE *; sarà quindi un parallelogrammo la figura FECG. * p. 23. * p. 31.

E poichè BE è uguale ad EC, sarà anche il triangolo ABE uguale all'altro AEC; essendo essi sopra le uguali basi BE, EC, e tra le medesime parallele BC, AG *. Quindi il triangolo ABC è doppio dell' altro AEC. Ma è poi anche il parallelogrammo FECG doppio del triangolo AEC; essendo entrambi sulla stessa base, e tra le medesime parallele *: dunque il parallelogrammo FECG è uguale al triangolo ABC, ed ha l' angolo CEF uguale all' angolo dato D. * p. 38. * p. 41.

Per la qual cosa è stato descritto il parallelogrammo FECG uguale al dato triangolo ABC, ed avente uno de' suoi angoli CEF uguale al dato angolo D. C.B.D.

PROPOSIZIONE XLIII.

TEOREMA.

In ogni parallelogrammo, i complementi di quelli parallelogrammi, che sono intorno al diametro, sono uguali tra loro.

fig. 43. Sia il parallelogrammo ABCD, ed AC il suo diametro; ed intorno ad AC vi sieno i parallelogrammi EH, FG, e gli altri, che diconsi complementi sieno BK, KD: dico che il complemento BK sia uguale all' altro KD.

Imperciocchè essendo ABCD un parallelogrammo, ed AC il suo diametro, il triangolo ABC è
* p. 34. uguale al triangolo ADC *. E similmente essendo EKHA un parallelogrammo, ed AK il suo diametro. il triangolo AEK è uguale al triangolo AHK. Per l'istessa ragione anche il triangolo KGC è uguale all'altro KFC. Essendo dunque il triangolo AEK uguale al triangolo AHK, ed il triangolo KGC all' altro KFC, sarà il triangolo AEK insieme col triangolo KGC uguale al triangolo AHK insieme coll'altro KFC. Ma è poi tutto il triangolo ABC uguale a tutto l' altro ADC. Dunque il rimanente complemento BK è uguale al rimanente complemento KD.

Quindi i complementi dei parallelogrammi, che sono intorno al diametro d' ogni parallelogrammo, sono uguali tra loro. C.B.D.

PROPOSIZIONE XLIV.

Problema.

Ad una data linea retta applicare un parallelogrammo, che sia uguale ad un dato triangolo, ed abbia uno de' suoi angoli uguale ad un dato angolo rettilineo.

Sia AB la linea retta data, C il triangolo dato, *fig.* 44. e D il dato angolo rettilineo: fa d' uopo applicare alla data linea retta AB un parallelogrammo uguale al dato triangolo C, ed avente un angolo uguale al dato D.

Si descriva il parallelogrammo BEFG uguale al triangolo C, che abbia l' angolo EBG uguale all'angolo D *, e pongasi BE per dritto con AB; indi si * p. 42. prolunghi FG in H, e poi per A si tiri AH parallela a BG, o EF *, e si congiunga BH. * E poi- * p. 31. chè la linea retta HF cade nelle parallele AH, EF, gli angoli AHF, HFE sono insieme presi uguali a due retti *: e perciò gli altri BHG, GFE sono mino- * p. 29. re di due retti. Ma se due linee rette segate da una terza fanno con questa gli angoli interiori dalla stessa parte minori di due retti, prolungate indefinitamente debbono incontrarsi *, dunque le HB, * a. 5. FE prolungate s' incontreranno. Si prolunghino, e s' incontrino in K; e per K si tiri KL parallela ad EA, o FH, e si prolunghino pure le AH, GB sino ai punti L, M. E poichè HLKF è un parallelogrammo, di cui n' è diametro HK; ed intorno ad

HK vi sono i parallelogrammi AG, ME, ed LB, BF
* p. 43. sono i complementi; perciò LB è uguale a BF *. Ma è poi BF uguale al triangolo C, sarà quindi anche LB uguale al triangolo C. E poichè l'angolo GBE è
* p. 15. uguale all'altro ABM *; ed è poi esso GBE uguale all'angolo D', sarà anche l'angolo ABM uguale all'angolo D.

Quindi ad una data linea retta AB si è applicato il parallelogrammo LB uguale al dato triangolo C, e che ha uno de' suoi angoli uguale al dato angolo rettilineo D.C.B.F.

PROPOSIZIONE XLV.

PROBLEMA.

Descrivere un parallelogrammo uguale ad una data figura rettilinea, ed avente un angolo uguale ad un dato angolo rettilineo.

fig. 45. Sia ABCD la data figura rettilinea, ed E il dato angolo rettilineo: fa d'uopo descrivere un parrellelogrammo uguale ad ABCD, ed avente un angolo uguale ad E.

Si unisca DB, e poi si descriva il parallelogrammo FH uguale al triangolo ADB, avente l'angolo
* p. 42. HKF uguale all'angolo E *; indi si applichi alla linea retta GH il parallelogrammo GM uguale al triangolo DBC, ed avente l'angolo GHM uguale
* p. 44. all'angolo E *.

E poichè l'angolo E è uguale a ciascuno degli angoli HKF, GHM; sarà anche l'angolo HKF ugua-

le all'altro GHM: vi si aggiunga di comune l'angolo KHG; e saranno gli angoli FKH, KHG uguali agli angoli KHG, GHM. Ma gli angoli FKH, KHG sono uguali a due retti *; dunque anche gli altri KHG, GHM saranno uguali a due retti. E poichè nella linea retta GH, ed al punto H in essa le due linee rette KH, HM, alle parti opposte della GH, formano gli angoli adjacenti uguali a due retti; perciò KH è per dritto con HM *. E perchè nelle parallele KM, FG vi cade la linea retta HG, gli angoli alterni MHG, HGF sono uguali *: vi si aggiunga di comune l'angolo HGL; e saranno gli angoli MHG, HGL uguali agli altri HGF, HGL. Ma gli angoli MHG, HGL sono uguali a due retti; perciò anche gli angoli HGF, HGL saranno uguali a due retti: quindi FG sarà per dritto con GL *. Or poichè KF è uguale, e parallela ad HG, come pure HG ad ML; sarà KF uguale, e parallela ad ML *. Ma sono anche parallele le KM, FL; dunque la figura KMLF è un parallelogrammo. Ed essendo il triangolo ABD uguale al parallelogrammo HF, ed il triangolo DBC al parallelogrammo GM; sarà tutto il rettilineo ABCD uguale a tutto il parallelogrammo KFLM.

* p. 29.
* p. 14.
* p. 29.
* p. 14.
* p. 30.

Quindi si è descritto il parallelogrammo KFLM uguale alla data figura rettilinea ABCD, ed avente l'angolo FKM uguale al dato angolo rettilineo E. C. B. F.

Cor. Dalle cose già dette è manifesto, in qual modo si possa applicare ad una data linea retta un parallelogrammo uguale ad un dato rettilineo, in un angolo rettilineo uguale ad un angolo dato. Poi-

chè è chiaro, che si otterrà ciò che si dimanda, applicando alla data linea retta un parallelogrammo uguale al primo triangolo ABD, ed avente un angolo uguale al dato.

PROPOSIZIONE XLVI.

TEOREMA.

Descrivere il quadrato sopra una linea retta data.

fig. 46. Sia data la linea retta AB: fa d' uopo descrivere sopra essa il quadrato.

Si tiri alla linea retta AB, dal punto A dato in essa, la perpendicolare AC, e si ponga AD uguale ad AB; poi per lo punto D si tiri DE parallela ad AB, e per B similmente si tiri BE parallela ad AD. È dunque la figura ADEB un parallelogrammo;
* p. 34. e perciò AB è uguale a DE, ed AD a BE *. Ma anche BA è uguale ad AD; dunque le quattro linee rette BA, AD, DE, EB sono uguali tra loro; e perciò il parallelogrammo ADEB è equilatero.

Dico che sia anche rettangolo. Poichè nelle parallele AB, DE vi cade la linea retta AD; gli an-
* p. 29. goli BAD, ADE sono uguali a due retti *. Ma l' angolo BAD è retto; dunque anche l' angolo ADE sarà retto. Or gli angoli opposti dei parallelogram-
* p. 34. mi sono uguali *: perciò ciascuno degli angoli ABE, BED, che sono rispettivamente opposti ai precedenti, sarà retto. Per la qual cosa la figura ABED è un rettangolo. Ma è stata anche dimostrata equilatera; dunque essa è un quadrato *, ed è de-
* d. 30. scritto sopra la data linea retta AB. C.B.F.

PROPOSIZIONE XLVII.

TEOREMA.

In ogni triangolo rettangolo, il quadrato, ch'è descritto sopra il lato, che sottende l' angolo retto è uguale ai quadrati, che si descrivono sopra i lati, che contengono questo stesso angolo.

Sia il triangolo rettangolo ABC, che ha retto l' angolo BAC: dico che il quadrato descritto sopra il lato BC, sia uguale ai quadrati descritti sopra gli altri lati BA, AC. *fig.* 47.

Sopra BC si descriva il quadrato BDEC *, e sopra BA, AC gli altri quadrati GB, HC; per A si tiri AL parallela a BD, o CE, e si uniscano le AD, FC. E poichè è retto ciascuno degli angoli BAC, BAG; perciò al punto A nella linea retta AB, le due altre linee rette AC, AG alle parti opposte di quella, vi fanno gli adjacenti angoli BAC, BAG insieme uguali a due retti; è dunque CA per dritto con AG *: e per la stessa ragione è pure AB per dritto con AH. Or essendo l' angolo DBC uguale all' angolo FBA, perchè ciascuno di essi è retto; vi si aggiunga di comune l' angolo ABC, e sarà tutto l' angolo DBA uguale a tutto l' angolo FBC. Quindi essendo le due AB, BD uguali alle due FB, BC, ciascuna a ciascuna, e l' angolo DBA uguale all'angolo FBC, sarà anche la base AD uguale alla base FC, ed il triangolo ABD uguale al triangolo FBC*. Ma il parallelogrammo BL è doppio del triangolo

* p. 46.
* p. 14.
* p. 4.

ABD, perciocchè hanno la stessa base BD, e sono
* p. 41. tra le medesime parallele BD, AL *; ed il quadrato GB è pure doppio del triangolo FBC, perciocchè anch' essi sono sopra la stessa base FB, e tra le medesime parallele FB, GC. Or quelle grandezze, che sono doppie di altre grandezze uguali, so-
* a. 6. no altresì uguali tra loro *: dunque il parallelogrammo BL è uguale al quadrato GB. Dell' istessa maniera, unite le AE, BK, si dimostrerà anche il parallelogrammo CL uguale al quadrato HC: quindi tutto il quadrato DBCE è uguale ai due quadrati GB, HC. Ma il quadrato DBCE è descritto sopra la linea retta BC, ed i quadrati GB, HC sopra le AB, AC: dunque il quadrato BE descritto sopra il lato BC è uguale ai quadrati, che descrivonsi sopra i lati BA, AC.

E perciò in ogni triangolo rettangolo, il quadrato ch' è descritto sopra il lato, che sottende l'angolo retto è uguale ai quadrati, che si descrivono sopra i lati, che contengono questo stesso angolo. C.B.D.

PROPOSIZIONE XLVIII.

TEOREMA.

Se il quadrato descritto sopra uno dei lati di un triangolo sia uguale ai quadrati descritti sopra gli altri due lati del medesimo; l' angolo contenuto da questi due lati sarà retto.

fig. 48. Nel triangolo ABC sia il quadrato del lato BC uguale ai quadrati degli altri due lati BA, AC; dico che l' angolo BAC sia retto.

Imperocchè, conducasi dal punto A ad AC la perpendicolare AD *; si ponga poi AD uguale a BA, e si unisca DC. E poichè DA è uguale ad AB, sarà anche il quadrato di DA (*) uguale al quadrato di AB; vi si aggiunga di comune il quadrato di CA, e saranno i quadrati di DA, e di AC uguali ai quadrati di BA, e di AC. Ma il quadrato di DC è uguale ai quadrati di DA, e di AC, essendo retto l' angolo DAC *; ed il quadrato di BC è uguale per supposizione ai quadrati di BA, e di AC: perciò il quadrato di DC è uguale a quello di BC; e quindi il lato DC è uguale al lato CB. E poichè DA è uguale ad AB, ed AC è comune, saranno le due DA, AC uguali alle altre due BA, AC. Ma la base DC è uguale alla base CB; dunque l' angolo DAC è uguale all' angolo BAC *. Or l' angolo DAC è retto; quindi anche l' altro BAC sarà retto.

* p. 13.
* p. 47.
* p. 8.

E perciò se il quadrato descritto sopra uno dei lati di un triangolo sia uguale ai quadrati descritti sopra gli altri due lati del medesimo; l' angolo contenuto da questi due lati sarà retto. C.B.D.

(*) N.B. In appresso spesso invece di dire *il quadrato, che si descrive sopra la linea retta AB*; si dirà per brevità *il quadrato di AB*

FINE DEL PRIMO LIBRO.

IL SECONDO LIBRO

DEGLI

ELEMENTI DI EUCLIDE

DEFINIZIONI

I. Ogni parallelogrammo rettangolo dicesi *contenuto* da quelle due linee rette, che comprendono uno de' suoi angoli retti.

II. In ogni parallelogrammo ciascuno di quei parallelogrammi, che sono intorno al diametro di esso, insieme coi due complementi, si chiami *gnomone*.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Se vi sieno due linee rette, ed una di esse sia divisa in un qualunque numero di parti, l' altra non sia divisa; il rettangolo contenuto da tali due linee rette è uguale a quei rettangoli, che contengonsi dalla linea retta non divisa, e da ciascuna parte della divisa.

fig. 49. Sieno le due linee rette A, e BC; e BC sia divisa comunque nei punti D, E: dico che il rettan-

golo contenuto dalle linee rette A, e BC, sia uguale ai rettangoli contenuti da A, e BD; da A, e DE; e da A, ed EC presi insieme.

Dal punto B si tiri BF perpendicolare a BC, e* pongasi BG uguale ad A; poi per G si tiri GH parallela a BC, e per D, E, C si conducano pure le DK, EL, CH parallele a BG*. Ciò posto il rettangolo BH è uguale ai rettangoli BK, DL, EH. Or il rettangolo BH è per l'appunto quello, ch' è contenuto da A, e BC, poichè esso è contenuto da CB, BG, e BG è uguale ad A: del pari ancora il rettangolo BK è quello, ch'è contenuto da A, e BD, poichè è contenuto da GB, e BD delle quali GB è uguale ad A; similmente il rettangolo DL è quello, ch' è contenuto da A, e DE, poichè DK ossia BG è uguale ad A; finalmente il rettangolo EH è quello, ch' è contenuto da A, ed EC. Per la qual cosa il rettangolo contenuto da A, e BC è uguale ai rettangoli contenuti da A, e BD; da A, e DE; e da A, ed EC presi insieme.

* 11. I

* 31. I

E perciò se vi sieno due linee rette, ed una di esse sia divisa in qualunque numero di parti, l'altro non sia divisa; il rettangolo contenuto da tali due linee rette, è uguale a quei rettangoli, che contengonsi dalla linea retta non divisa, e da ciascuna parte della divisa. C.B.D.

PROPOSIZIONE. II.

TEOREMA.

Se una linea retta sia comunque divisa; i rettangoli contenuti dalla tutta, e da ciascuna delle parti, insieme presi, sono uguali al quadrato dell' intera linea.

fig. 50. Sia la linea retta AB comunque divisa nel punto C: dico che i rettangoli contenuti da AB, e BC, e da BA, ed AC, insieme presi, sieno uguali al quadrato di AB.

* 46. I Si descriva sopra AB il quadrato ADEB *, e per
* 31. I C si tiri CF parallela ad AD, o BE *.

Ciò posto il rettangolo AE è uguale ai rettangoli AF, CE. Or AE è il quadrato di AB; ed il rettangolo AF è contenuto da BA, ed AC, poichè è contenuto da DA, ed AC, ed è DA uguale ad AB; e l'altro rettangolo CE è similmente contenuto da AB, e BC, essendo BE uguale ad AB. Dunque il rettangolo di BA in AC (*) insieme coll' altro di AB in BC, è uguale al quadrato di AB.

E perciò se una linea retta sia comunque divisa, i rettangoli contenuti dalla tutta, e da ciascuna delle parti, insieme presi, sono uguali al quadrato dell' intera linea. C.B.D.

(*) N. B. Per evitare le frequenti ripetizioni della voce contenuto; *il rettangolo contenuto dalle linee rette AB, e BC* è qualche volta chiamato semplicemente *il rettangolo di AB in BC*.

PROPOSIZIONE. III.

TEOREMA.

Se una linea retta sia comunque divisa; il rettangolo contenuto dalla tutta, e da una parte di essa è uguale al quadrato di questa parte medesima insieme col rettangolo di ambedue le parti.

Sia la linea retta AB comunque divisa in C: dico che il rettangolo di AB in BC sia uguale al quadrato di BC insieme col rettangolo di AC in CB. *fig.* 51.

Si descriva sopra BC il quadrato CDEB; si produca ED in F; e per A si tiri AF parallela a CD, o BE.

Allora il rettangolo AE è uguale ai rettangoli AD, e CE. Or AE è il rettangolo contenuto da AB, e BC; perciocchè è contenuto da AB, e BE, delle quali BE è uguale a BC; AD è il rettangolo contenuto da AC, e CB, poichè DC è uguale a CB: è finalmente DB è il quadrato di BC. Dunque il rettangolo di AB in BC è uguale al quadrato di BC insieme col rettangolo di AC in CB.

Se dunque una linea retta sia comunque divisa; il rettangolo contenuto dalla tutta, e da una parte di essa è uguale al quadrato di questa parte medesima insieme col rettangolo di ambedue le parti.

PROPOSIZIONE. IV.

TEOREMA.

Se una linea retta sia comunque divisa; il quadrato della tutta è uguale ai quadrati delle parti insieme col doppio rettangolo contenuto dalle medesime parti.

fig. 52. Sia la linea retta AB comunque divisa in C: dico che il quadrato di AB sia uguale ai quadrati di AC, e di CB insieme col doppio rettangolo contenuto da AC, e CB.

Si descriva sopra AB il quadrato ADEB; si congiunga poi BD, e per C si tiri CGF parallela ad AD, o BE; e per G, HK parallela ad AB, o DE.

Or poichè CF è parallela ad AD, e BD cade sulle medesime; perciò l' angolo esteriore BGC è uguale all' angolo interiore, ed opposto ADB *. Ma l' angolo ADB è uguale all' angolo ABD; perciocchè BA è uguale ad AD, essendo lati di un quadrato *: quindi l' angolo CGB è uguale all' angolo GBC, e perciò il lato BC è uguale al lato CG. Ma CB è altresì uguale a GK, e CG a BK *; dunque GK è uguale a KB; e perciò il quadrilatero CGKB è equilatero. Dico di più che sia anche rettangolo. Imperocchè essendo CG parallela a BK, e cadendo sopra di esse CB, gli angoli KBC, GCB sono uguali a due retti. Ma è retto l' angolo KBC; dunque anche l' altro GCB sarà retto: quindi anche retti saranno gli angoli CGK, GKB opposti a

* 29. I

* 5. I

* 34. I

quelli * ; e perciò la figura quadrilatera CGKB è rettangola. Ma si è dimostrata equilatera ; dunque essa è un quadrato, ed è quello di BC. Per la stessa ragione HF è il quadrato di HG, o di AC ; sono dunque HF, e CK i quadrati di AC, e di BC. Or poichè il complemento AG è uguale al complemento GE, ed AG è il rettangolo contenuto da AC, e CB, essendo GC uguale a CB ; perciò EG sarà altresì uguale al rettangolo di AC in CB : quindi i rettangoli AG, GE sono uguali al doppio rettangolo di AC in CB. Sono poi HF, e CK i quadrati di AC, e di CB ; dunque i quattro parallelogrammi HF, CK, AG, GE sono uguali ai quadrati di AC, e di CB, ed al doppio rettangolo di AC in CB. Ma i parallelogrammi HF, CK, AG, GE formano l' intera figura ADEB, ch' è il quadrato di AB ; quindi il quadrato di BA è uguale ai quadrati di AC, e di CB, ed al doppio rettangolo di AC in CB. * 34. I

È perciò se una linea retta sia comunque divisa; il quadrato della tutta è uguale ai quadrati delle parti insieme col doppio rettangolo contenuto dalle medesime parti. C.B.D.

Cor. Da ciò che si è dimostrato si rileva chiaramente, che nei quadrati, i parallelogrammi intorno al diametro sieno anche quadrati.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Se una linea retta sia divisa in parti uguali, ed in parti disuguali; il rettangolo delle parti disuguali della tutta insieme col quadrato della linea tra i punti delle sezioni è uguale al quadrato della metà.

fig. 53. Sia la linea retta AB divisa in parti uguali nel punto C, ed in parti disuguali in D: dico che il rettangolo di AD in DB insieme col quadrato di CD sia uguale al quadrato di CB.

Sopra CB si descriva il quadrato CEFB, e si unisca BE; poi per D si tiri DHG parallela a CE, o BF, e per H similmente si tiri KLM parallela a CB, o EF; e finalmente anche per A si tiri AK parallela a CL, ò BM.

E poichè il complemento CH è uguale al com-
* 43. I. plemento HF *; vi si aggiunga a ciascuno di essi DM, e sarà tutto CM uguale a tutto DF. Ma CM è
* 36. I. uguale a CK, poichè AC è uguale a CB *; dunque AL sarà uguale a DF: si aggiunga anche a questi di comune CH, e sarà tutto AH uguale ad FD, e DL. Ma AH è il rettangolo contenuto da AD, e
*cor.4.II. DB, poichè DH è uguale a DB *; ed FD, e DL formano lo gnomone ONX: quindi lo gnomone ONX è uguale al rettangolo di AD in DB. Or anche qui vi si aggiunga di comune LG, ch' è u-
*cor.4.II. guale al quadrato di CD *, e sarà lo gnomone ONX insieme col quadrato LG uguale al rettangolo di

AD in DB insieme col quadrato di CD . Ma lo gnomone ONX, ed il quadrato LG formano tutto il quadrato CEFB, ch'è il quadrato di CB : perciò il rettangolo di AD in DB insieme col quadrato di CD è uguale al quadrato di CB.

Quindi se una linea retta sia divisa in parti uguali, ed in parti disuguali; il rettangolo contenuto dalle parti disuguali della tutta insieme col quadrato della linea tra i punti delle sezioni è uguale al quadrato della metà. C.B.D.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Se una linea retta si divida per metà, e ad essa si aggiunga per dritto un' altra linea retta; il rettangolo contenuto dalla tutta coll' aggiunta, e dall' istessa aggiunta insieme col quadrato della metà è uguale al quadrato, che si descrive sopra la composta della metà e dell' aggiunta, come di una linea sola.

Si divida la linea retta AB per metà nel punto C, e vi si aggiunga per dritto BD : dico che il rettangolo di AD in DB insieme col quadrato di BC sia uguale al quadrato di CD, *fig.* 54.

Sopra CD si descriva il quadrato CEFD, e si unisca DE; si tiri poi per B la parallela BHG a CE, o DF, e parimente per H si tiri KLM parallela ad AD, o EF; e finalmente per A si tiri AK parallela a CL, o DM.

E poichè AC è uguale a CB, sarà il rettangolo
* 36. I. AL uguale al rettangolo CH *. Ma CH è uguale ad
* 43. I. HF *; dunque AL sarà uguale ad HF. Or si aggiunga a ciascuno di questi CM, e sarà tutto il rettangolo AM uguale allo gnomone NXO. Ma AM è il rettangolo contenuto da AD, e DB, poichè DM è uguale a DB: dunque lo gnomone NXO è uguale al rettangolo di AD in DB. Si aggiunga similmente a ciascuno di questi la figura LG, ch' è
* cor.4.II uguale al quadrato di CB *, e sarà il rettangolo di AD in DB insieme col quadrato di CB uguale allo gnomone NXO insieme con LG. Ma lo gnomone NXO, ed LG formano l'intera figura CEFD, ch' è il quadrato di CD: dunque il rettangolo di AD in DB insieme col quadrato di CB è uguale al quadrato di CD.

E perciò se una linea retta si divida per metà, e ad essa si aggiunga per dritto un' altra linea retta; il rettangolo contenuto dalla tutta coll'aggiunta, e dall' istessa aggiunta insieme col quadrato della metà è uguale al quadrato, che si descrive dalla composta della metà, e dell' aggiunta, come di una linea sola. C.B.D.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Se una linea retta sia divisa comunque; i due quadrati, uno descritto sopra la tutta, e l' altro sopra una parte, sono uguali al doppio rettangolo contenuto dalla tutta, e dalla detta parte insieme col quadrato dell' altra parte.

Sia la linea retta AB comunque divisa nel punto C: dico che i quadrati di AB, e di BC sieno uguali al doppio rettangolo contenuto da AB, e BC insieme col quadrato di AC. *fig.* 55.

Sopra di AB si descriva il quadrato ADEB, e costruiscasi la figura.

E poichè il rettangolo AG è uguale al rettangolo GE*, se si aggiunga a ciascuno di essi il quadrato CK*, sarà tutto AK uguale a tutto CE; e perciò i rettangoli AK, CE sono il doppio del rettangolo AK. Ma i rettangoli AK, CE formano lo gnomone NLM, ed il quadrato CK; dunque lo gnomone NLM, ed il quadrato CK saranno il doppio del rettangolo AK. Ma è pure il rettangolo di AB in BC, preso due volte, doppio di AK, poichè BK è uguale a BC; dunque lo gnomone KLM, ed il quadrato CK sono uguali al doppio rettangolo di AB in BC. Or vi si aggiunga di comune DG, ch' è il quadrato di AC, e saranno lo gnomone NLM, ed i quadrati BG, e GD uguali al doppio rettangolo di AB in BC, ed al quadrato di AC. Ma lo gno-

* 43. I.
* cor. 4. II.

mone NLM, ed i quadrati BG, GD formano la figura ADEB insieme con CK, e queste sono i quadrati di AB, e di BC: dunque i quadrati di AB, e di BC sono uguali al doppio rettangolo di AB in BC insieme col quadrato di AC.

E perciò se una linea retta sia comunque divisa; i due quadrati uno descritto sopra la tutta, e l'altro sopra una parte sono uguali al doppio rettangolo contenuto dalla tutta, e dalla detta parte insieme col quadrato dell' altra parte. C.B.D.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Se una linea retta sia comunque divisa; il quadruplo rettangolo contenuto dalla tutta, e da una parte insieme col quadrato dell'altra parte è uguale al quadrato, che si descrive sopra la tutta, e la parte predetta, come di una linea sola.

fig. 56. Sia la linea retta AB divisa comunque in C: dico che il quadruplo rettangolo contenuto da AB, e BC insieme col quadrato di AC sia uguale al quadrato, che si descrive sopra le AB, e BC, come di una linea sola.

La linea retta AB si prolunghi sino a D, e si ponga BD uguale a CB; poi si descriva sopra AD il quadrato AEFD, e si costruisca la doppia figura.

E poichè CB è uguale a BD, e la stessa CB è uguale a
* 34. I. GK*, BD a KN, sarà anche GK uguale a KN; e similmen-

te dimostreremo PR uguale ad RO. Or perchè CB è uguale a BD, e GK a KN; sarà il rettangolo CK uguale al rettangolo KD, ed il rettangolo GR uguale all' altro RN *. Ma CK è uguale ad RN,* 36. I.
comechè sono complementi del parallelogrammo CO *; * 43. I.
dunque KD è anche uguale a GR: e perciò i quattro rettangoli DK, KC, GR, RN sono uguali tra loro; e quindi sono insieme il quadruplo del rettangolo CK. Similmente poichè CB è uguale a BD, e BD è poi uguale a BK *, o sia a CG, CB a GK, *cor.4.II.
o sia a GP, sarà CG uguale a GP: è pure PR uguale ad RO; sarà perciò il rettangolo AG uguale al rettangolo MP, e 'l rettangolo PL all' altro RF. Ma MP è uguale a PL, poichè sono complementi del parallelogrammo ML; quindi anche AG è uguale ad RF. Per la qual cosa i quattro parallelogrammi AG, MP, PL, RF sono tra di loro uguali; e perciò tutt' insieme sono il quadruplo di AG. Si è anche dimostrato, che i quattro parallelogrammi CK, KD, GR, RN sono insieme il quadruplo di CK; quindi gli otto parallelogrammi, che formano lo gnomone STY sono il quadruplo del rettangolo AK. E poichè AK è il rettangolo contenuto da AB, e BC, essendo BK uguale a BC; sarà il rettangolo contenuto da AB, e BC, preso quattro volte, quadruplo di AK. Ma si è dimostrato lo gnomone STY anche quadruplo di AK: dunque il quadruplo rettangolo di AB in BC è uguale allo gnomone STY: si aggiunga ad essi di comune XH, ch' è uguale al quadrato di AC *, e sarà il quadru- *cor.4.II.
plo rettangolo di AB in BC insieme col quadrato di AC uguale allo gnomone STY, ed al quadra-

to XH. Or lo gnomone STY, ed XH, formano tutto il quadrato AEFD, che si descrive sopra AD: dunque il quadruplo rettangolo di AB in BC insieme col quadrato di AC è uguale al quadrato di AD, o sia di AB, e BC, come di una linea sola.

E perciò se una linea retta sia divisa comunque; il quadruplo rettangolo contenuto dalla tutta, e da una parte insieme col quadrato della parte rimanente è uguale al quadrato, che si descrive sopra la tutta, e la parte predetta, come di una linea sola. C.B.D.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Se una linea retta sia divisa in parti uguali, ed in parti disuguali; i quadrati delle parti disuguali della tutta sono il doppio del quadrato della metà, e del quadrato di quella linea, ch'è tra i punti delle sezioni.

fig. 57. Sia la linea retta AB divisa in parti uguali nel punto C, ed in parti disuguali in D: dico che i quadrati di AD, e di DB sieno il doppio dei quadrati di AC, e di CD.

Si tiri dal punto C ad AB la perpendicolare CE, la quale si ponga uguale ad AC, o CB, e si uniscano le EA, EB; poi per D si tiri DF parallela a CE, e similmente per F, FG parallela ad AB; finalmente si congiunga AF.

E poichè AC è uguale a CE, sarà l'angolo EAC

uguale all'angolo AEC; e perciò essendo retto l'angolo in C, i rimanenti angoli EAC, AEC saranno uguali ad un retto *. Ma essi sono anche tra di loro * 32. I.
uguali; dunque ciascuno degli angoli AEC, EAC è metà di un retto. Dell'istessa maniera si dimostra, che ciascuno degli angoli CEB, EBC è pure metà di un retto; quindi tutto l'angolo AEB è retto. Ed essendo l'angolo GEF metà di un retto, e l'angolo EGF retto, perchè uguale all'interno ed opposto ECB *; sarà anche il rimanente angolo * 29. I.
EFG metà di un retto: perciò l'angolo GEF è uguale all'altro EFG; e quindi il lato EG è uguale al lato GF *. Similmente, essendo l'angolo in B * 6. I.
metà di un retto, e l'angolo FDB retto, perchè uguale all'interno, ed opposto ECB; sarà il rimanente BFD anche metà di un retto: quindi l'angolo in B è uguale all'angolo DFB; e perciò il lato DF è uguale al lato DB.

Or poichè AC è uguale a CE, sarà il quadrato di AC uguale a quello di CE; laonde i quadrati di AC, e di CE sono il doppio del quadrato di AC. Ma ai quadrati di AC, e di CE è uguale quello di EA, essendo retto l'angolo ACE *; dunque * 47. I.
il quadrato di EA è doppio del quadrato di AC. Similmente essendo EG uguale a GF, anche il quadrato di EG è uguale a quello di GF; dunque i quadrati di EG, e di GF sono il doppio del quadrato di GF. Ma ai quadrati di EG, e di GF è uguale il quadrato di EF; dunque il quadrato di EF sarà doppio di quello di GF: è poi GF uguale a CD; quindi il quadrato di EF è doppio del quadrato di CD: ed è anche il quadrato di

AE doppio di quello di AC ; perciò i quadrati di AE, e di EF sono il doppio dei quadrati di AC, e di CD. Per la qual cosa essendo ai quadrati di AE, e di EF uguale il quadrato di AF, poichè l'angolo AEF è retto ; sarà anche il quadrato di AF doppio dei quadrati di AC, e di CD. Ma al quadrato di AF sono uguali i quadrati di AD, e di DF, essendo retto l'angolo in D: quindi i quadrati di AD, e di DF saranno il doppio dei quadrati di AC, e di CD.

Se dunque una linea retta sia divisa in parti uguali, ed in parti disuguali; i quadrati delle parti disuguali della tutta sono il doppio del quadrato della metà, e del quadrato di quella linea, ch' è tra i punti delle sezioni C.B.D.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

Se una linea retta si divida per metà, ed ad essa si aggiunga per dritto un' altra linea retta ; i due quadrati uno, che si descrive sopra la tutta, e l'aggiunta, come di una linea sola, l'altro sopra l'aggiunta sono il doppio del quadrato della metà, e del quadrato di quella linea retta, ch' è composta della metà, e dell' aggiunta, come di una linea sola.

fig. 58. Si divida la linea retta AB per metà in C, e per dritto ad essa si aggiunga un' altra linea retta BD: dico che i quadrati di AD, e di DB sieno il doppio dei quadrati di AC, e di CD.

Dal punto C si tiri CE perpendicolare ad AB, la quale si ponga uguale ad AC, o CB, e si uniscano le AE, EB; poi per E si tiri EF parallela ad AD, e per D, DF parallela a CE. E poichè nelle parallele EC, FD vi cade la linea retta EF, gli angoli CEF, EFD sono uguali a due retti *; e perciò gli angoli FEB, EFD sono minori di due retti. * 29. I.
Ma quelle linee rette, che intersegate da un'altra fanno con questa gli angoli interni dalla parte stessa minori di due retti, prolungate indefinitamente debbono incontrarsi *; dunque le EB, FD prodotte dalla parte BD dovranno incontrarsi; si prolunghino, e s'incontrino nel punto G, e si congiunga AG. * a. 5

E poichè AC è uguale a CE, l'angolo AEC sarà uguale all'angolo EAC. Ma l'angolo in C è retto; perciò ciascuno dei due altri angoli EAC, AEC è metà del retto *. Similmente si dimostra che sì l'angolo CEB, che l'altro EBC è metà del retto; quindi l'angolo AEB è retto. Or essendo EBC metà del retto, sarà anche metà del retto l'altro DBG, che gli è verticale *. Ma l'angolo BDG è retto, poichè è uguale all'alterno DCE *: quindi il rimanente angolo DGB è pure metà del retto; e perciò uguale a DBG; ond'è che il lato BD è uguale al lato DG. Similmente poichè l'angolo EGF è metà del retto, e l'angolo in F è retto, come uguale all'angolo opposto in C, sarà il rimanente angolo FEG anche metà del retto; e quindi uguale ad EGF: e perciò il lato GF è uguale al lato EF. * 32. I. * 15. I. * 29 I.

Or essendo EC uguale a CA, il quadrato di EC è uguale a quello di CA; e perciò i quadrati di EC, e di CA sono il doppio del qua-

drato di CA. Ma il quadrato di EA è uguale ai
* 47. I. quadrati di EC, e di CA *; dunque il quadrato di EA
è il doppio di quello di AC. Del pari poichè GF è
uguale ad FE, anche il quadrato di GF è uguale al quadrato di FE; e perciò i quadrati di GF,
e di FE sono il doppio del quadrato di EF. Ma
ai quadrati di GF, e di FE è uguale il quadrato di EG; dunque il quadrato di EG è doppio del
* 34. I. quadrato di EF: è poi EF uguale a CD *; sarà perciò il quadrato di EG doppio del quadrato di CD.
Si è anche dimostrato il quadrato di EA doppio del
quadrato di AC: quindi i quadrati di AE, e di
EG sono il doppio dei quadrati di AC, e di CD. Or
ai quadrati di AE, e di EG è uguale il quadrato di
47. I. AG *; sarà quindi il quadrato di AG doppio dei quadrati di AC, e di CD. Ma al quadrato di AG sono
uguali i quadrati di AD, e di DG; perciò anche i
quadrati di AD, e di DG sono il doppio dei quadrati
di AC, e di CD. È poi DG uguale a DB: dunque
i quadrati di AD, e di DB sono il doppio dei quadrati di AC, e di CD.

Per la qual cosa se una linea retta si divida per metà ed ad essa si aggiunga per dritto un' altra linea retta; i due quadrati, uno che si descrive sopra la tutta, e l'aggiunta, come di una linea sola, l' altro sopra l'aggiunta sono il doppio del quadrato della metà, e del quadrato di quella linea retta, ch' è composta della metà, e dell'aggiunta, come di una linea sola C.B.D.

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA.

Dividere una linea retta data in modo, che il rettangolo contenuto dalla tutta, e da una parte sia uguale al quadrato dell' altra parte.

Sia data la linea retta AB: fa d' uopo dividerla in modo, che il rettangolo contenuto dalla tutta, e da una parte sia uguale al quadrato dell' altra parte. *fig. 59.*

Si descriva sopra AB il quadrato ACDB, si divida AC per metà in E, e si unisca BE: indi, si prolunghi CA in F, e si ponga EF uguale a BE; e descritto sopra AF il quadrato FGHA, si prolunghi GH in K: dico che la linea retta AB resti divisa in H in modo, che il rettangolo di AB in BH sia uguale al quadrato di AH.

Poichè essendo la linea retta AC divisa per metà in E, e per dritto ad essa aggiunta AF; il rettangolo di CF in FA insieme col quadrato di AE sarà uguale al quadrato di EF *. Ma EF è uguale ad EB; perciò il rettangolo di CF in FA insieme col quadrato di AE è uguale al quadrato di EB. Or questo quadrato è uguale ai quadrati di BA, e di AE; poichè è retto l' angolo in A: dunque il rettangolo di CF in FA insieme col quadrato di AE è uguale ai quadrati di BA, e di AE; se ne tolga di comune il quadrato di AE, e sarà il rimanente rettangolo di CF in FA uguale al qua-

* 6. II.

drato di AB. È poi il rettangolo di CF in FA lo stesso che FK, poichè AF è uguale per l'appunto ad FG; ed il quadrato di AB è AD; dunque il rettangolo FK è uguale al quadrato AD: toltone di comune AK, sarà il rimanente rettangolo FH uguale al rimanente HD. Ma HD è il rettangolo di AB in BH, poichè AB è uguale a BD; ed FH è il quadrato di AH: dunque il rettangolo di AB in BH è uguale al quadrato di AH.

E perciò la data linea retta AB, si è divisa in H in modo, che il rettangolo di AB in BH è uguale al quadrato di AH. C.B.F.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

In ogni triangolo ottusangolo, se si abbassi la perpendicolare da uno degli angoli acuti al lato opposto prolungato; il quadrato del lato, che sottende l'angolo ottuso è maggiore dei quadrati dei lati, che lo comprendono, per lo doppio rettangolo contenuto dal lato, che si è prolungato, e dalla linea retta, ch'è tra l'angolo ottuso, e la perpendicolare.

fig. 60. Sia il triangolo ottusangolo ABC, che ha ottuso l'angolo BAC, e dal punto B si tiri alla BA prolungata la perpendicolare BD: dico che il quadrato di BC sia maggiore dei quadrati di BA, e di AC, per lo doppio rettangolo contenuto da CA, ed AD.

E poichè la linea retta CD è divisa comunque

nel punto A, sarà il quadrato di CD uguale ai quadrati di CA, e di AD, ed al doppio rettangolo di CA, in AD *; vi si aggiunga di comune il quadrato di BD, e saranno i quadrati di CD, e di DB uguali ai quadrati di CA, di AD, e di DB, ed al doppio rettangolo di CA in AD. Ma ai quadrati di CD, e di DB è uguale il quadrato di CB, perchè è retto l' angolo in D, mentre BD è perpendicolare ad AC; ed ai quadrati di AD, e di DC è uguale il quadrato di AB: dunque il quadrato di CB è uguale ai quadrati di CA, e di AB, ed al doppio rettangolo di CA in AD, * 4. II

E perciò in ogni triangolo ottusangolo se si abbassi la perpendicolare da uno degli angoli acuti al lato opposto prolungato; il quadrato del lato, che sottende l' angolo ottuso è maggiore dei quadrati dei lati, che lo comprendono, per lo doppio rettangolo contenuto dal lato, che si è prolungato, e dalla linea retta, ch' è tra l' angolo ottuso, e la perpendicolare C.B.D.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

In ogni triangolo obbliquangolo, cioè ottusangolo, o acutangolo; *il quadrato del lato, che sottende un angolo acuto è minore dei quadrati dei lati, che lo comprendono, per lo doppio rettangolo contenuto da uno di questi lati, e dalla linea retta intercettata tra l' angolo acuto, e la perpendicolare, che ad un tal lato si abbassa dall' angolo opposto.*

fig. 61. Sia il triangolo obbliquangolo ABC, che ha acuto l' angolo in B; e si tiri dal punto A sulla BC la perpendicolare AD: dico che il quadrato di AC sia minore dei quadrati di CB, e di BA, per lo doppio rettangolo di CB in BD.

Essendo la linea retta CB divisa comunque in D, saranno i quadrati di CB, e di BD uguali al doppio rettangolo di CB in BD, ed al quadrato di
* 7. II DC *; vi si aggiunga di comune il quadrato di AD, e saranno i quadrati di CB, di BD, e di DA uguali al doppio rettangolo di CB in BD, ed ai quadrati di AD, e di DC. Ma ai quadrati di BD, e di DA è uguale il quadrato di AB, perchè è retto l' angolo in D; ed ai quadrati di AD, e di DC è uguale il quadrato di AC: dunque i quadrati di CB, e di BA sono uguali al quadrato di AC, ed al doppio rettangolo di CB in BD; e perciò il solo quadrato di AC è minore dei quadrati di CB, e di BA, per lo doppio rettangolo di CB in BD

Quindi in ogni triangolo obbliquangolo; il quadrato del lato, che sottende l'angolo acuto è minore dei quadrati dei lati, che lo comprendono per lo doppio rettangolo contenuto da uno di questi lati, e dalla linea retta intercettata tra l'angolo acuto, e la perpendicolare, che ad un tal lato si abbassa dall' angolo opposto. C.B.D.

PROPOSIZIONE XIV.

PROBLEMA.

Costituire un quadrato uguale ad un rettilineo dato.

Sia dato il rettilineo A; fa d'uopo costituirli un quadrato uguale. *fig. 62.*

Si descriva il rettangolo BCDE uguale al rettilineo A *. Ciò posto se BE è uguale ad ED, si sarà fatto quello, che si domanda; poiche si sarà già costituito il quadrato BD uguale al rettilineo A. Ma se ciò non si avvera, si prolunghi BE in F, e si ponga EF uguale ad ED; indi divisa FB per metà in G, col centro G, intervallo GB, o GF si descriva il semicerchio BHF; poi si prolunghi DE in H, e si congiunga GH. * 45. I

E poichè la linea retta BF è divisa in parti uguali in G, ed in parti disuguali in E; sarà il rettangolo di BE in EF insieme col quadrato di EG uguale al quadrato di GF *. Ma è poi GF uguale a GH; quindi il rettangolo di BE in EF insieme * 5. II

col quadrato di GE è uguale al quadrato di GH. Or questo quadrato di GH è uguale ai quadrati
* 47. I di GE, e di EH *; dunque il rettangolo di BE in EF insieme col quadrato di EG è uguale ai quadrati di HE, e di EG: e perciò toltone di comune il quadrato di EG; sarà il rimanente rettangolo di BE in EF uguale al quadrato di EH. Ma il rettangolo di BE in EF è lo stesso che il parallelogrammo BD, poichè EF è uguale ad ED: dunque il parallelogrammo BD è uguale al quadrato di EH; e perciò essendo il parallelogrammo BD uguale al rettilineo A, sarà questo rettilineo uguale al quadrato di EH.

Si è dunque costituito un quadrato uguale ad un rettilineo dato, quello cioè che si descrive sopra EH. C.B.F.

FINE DEL SECONDO LIBRO.

IL TERZO LIBRO

DEGLI

ELEMENTI DI EUCLIDE

DEFINIZIONI.

I. Cerchi uguali sono quelli, i cui diametri sono uguali, o pure che hanno raggi uguali.

II. Una linea retta dicesi *toccare* un cerchio, quando lo incontra, ed essendo prolungata non lo sega.

III. I cerchi si dicono *toccar* l' un l' altro, quando incontrandosi non si segano scambievolmente.

IV. Le linee rette, che si tirano dentro di un cerchio, diconsi *ugualmente distanti* dal centro, quando le perpendicolari abbassate sopra esse dal centro sono uguali.

V. Dicesi poi essere *più distante* dal centro quella, sopra cui cade la perpendicolare maggiore.

VI. *Veggasi la def. XIX. Lib.*. 1

VII. L' angolo del segmento è quello, che si costituisce ad un estremo della base del segmento, da essa base, e dall' arco.

VIII. L' *angolo nel segmento* è quello, che vien contenuto da due linee rette tirate da un punto

della circonferenza del segmento alle estremità di quella linea retta, che gli è di base.

IX. Ed un tal angolo si dice *insistere* sopra quell' arco, ch' è compreso tra le linee rette, che contengono l' angolo

X. Il *settore* di un cerchio è quella figura, ch' è contenuta da due raggi, e dall' arco, che giace tra essi.

XI. *Segmenti simili* di cerchio sono quelli, che hanno uguali gli angoli, che sono in essi.

PROPOSIZIONE I.

PROBLEMA.

Ritrovare il centro di un dato cerchio.

fig. 63. Sia dato il cerchio ABC: fa d' uopo ritrovare il centro di esso.

Si tiri dentro di un tal cerchio comunque la linea retta AB, e questa si divida per metà in D: poi dal punto D si tiri sopra AB la perpendicolare DC, la quale si prolunghi in E, e si divida CE per metà in F: dico essere il punto F il centro del cerchio ABC.

Se può succedere, non sia F; ma G, e si uniscano le GA, GD, GB. E poichè AD è uguale a DB, e DG è comune, saranno le due AD, DG uguali alle due altre DB, GD, ciascuna a ciascuna: ma anche la base GA è uguale alla base GB, poichè sono
* d. 15. I raggi *; quindi l' angolo ADG è uguale all'angolo
* 8. I GDB *. Or allorchè una linea retta insistendo sopra di

un' altra linea retta, forma uguali gli angoli, che sono di quà e di là; l' uno e l' altro degli angoli uguali è retto: dunque l' angolo GDB è retto. Ma è anche retto l' angolo FDB; perciò l' angolo FDB è uguale all' altro GDB: il maggiore al minore; il che è impossibile. Non è dunque G il ceutro del cerchio ABC. Dimostreremo similmente, che verun altro punto lo sia, oltre di F: quindi F è il tro del cerchio ABC. C.B.F.

Cor. È chiaro da ciò, che se in un cerchio una qualunque linea retta ne seghi un' altra per metà, ed ad angoli retti; il centro di un tal cerchio debba trovarsi in quella segante.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Se nella circonferenza di un cerchio si prendano due punti ad arbitrio; la linea retta che gli unisce cadrà dentro di un tal cerchio.

Sia il cerchio ABC, e nella circonferenza di esso si prendano due punti ad arbitrio A, e B: dico che la linea retta, che tirasi dal punto A all' altro B, cada dentro del cerchio. *fig.* 64.

Poichè non vi cada; ma s' è possibile cada fuori come AEB: si prenda il centro del cerchio ABC*, che sia D, e si congiungano le AD, DB; e poi si tiri DE, la quale incontri la circonferenza in F. Or essendo DA uguale a DB, sarà anche l' angolo DAB uguale all' angolo DBA: ed essendosi prolun-

* 1. III

gato il lato AEB del triangolo DAE, l'angolo DEB
* 16. I sarà maggiore dell'altro DAE *. Or l'angolo DAE è uguale all'angolo DBE: dunque l'angolo DEB è maggiore dell'angolo DBE. Ma il maggior angolo è sotteso dal lato maggiore; quindi DB è maggiore di DE: è poi DB uguale a DF; dunque DF è maggiore di DE, la minore della maggiore, il che è impossibile. Quindi la linea retta tirata dal punto A all'altro B, non cade fuori del cerchio. Dimostreremo similmente che nè tampoco cada nella stessa circonferenza: dovrà dunque necessariamente cadere dentro del cerchio.

E perciò se nella circonferenza di un cerchio si prendano due punti ad arbitrio; la linea retta che gli unisce cadrà dentro di un tal cerchio C.B.D.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Se in un cerchio una linea retta, tirata per lo centro, divida per metà un'altra linea retta, non tirata per lo centro; la dividerà pure ad angoli retti: e se la divide ad angoli retti; la dividerà per metà.

fig. 65. Sia il cerchio ABC, e la linea retta CD, tirata per lo centro di esso, divida l'altra linea retta AB, non tirata per lo centro, per metà nel punto F: dico che la dividerà anche ad angoli retti.

Imperocchè, si prenda il centro del cerchio ABC, che sia E, e si uniscano le EA, EB. E poichè AF è uguale ad FB, ed FE è comune, sono le due AF,

FE uguali alle due BF, FE : ed è anche la base EA uguale alla base EB; dunque l' angolo AFE sarà uguale all' angolo BFE. Ma allorchè una linea retta insistendo sopra un' altra, forma uguali gli angoli, che sono di quà e di là, l' uno e l' altro degli angoli uguali è retto : dunque è retto sì l' angolo AFE, che l' altro BFE. E perciò la linea retta CD tirata per lo centro, dividendo l' altra AB non tirata per lo centro per metà, la dividerà pure ad angoli retti.

Or CD divida AB ad angoli retti : dico che la dividerà anche per metà, cioè che AF sia uguale ad FB.

Poichè, fatta la stessa costruzione : essendo il raggio EA uguale all' altro EB, l' angolo EAF sarà uguale all'angolo EBF. Ma è pure il retto AFE uguale al retto BFE : dunque i due triangoli EAF, EBF hanno due angoli uguali a due angoli, ed un lato uguale ad un lato, vale a dire EF, ch' è comune ad entrambi, il qual sottende uno degli angoli uguali; quindi avranno anche i rimanenti lati uguali ai rimanennti lati* : e sarà perciò AF uguale ad FB. * 26. I.

Se dunque in un cerchio una linea retta, tirata per lo centro, divida per metà un' altra linea retta, non tirata per lo centro; la dividerà pure ad angoli retti : e se la divide ad angoli retti; la dividerà anche per metà. C.B.D.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Se s' interseghino in un cerchio due linee rette, non tirate per lo centro, non si potranno scambievolmente dividere per metà.

fig. 66. Sia il cerchio ABCD, e s' interseghino in esso nel punto E le due linee rette AC, BD, non tirate per lo centro: dico, che esse non si potranno scabievolmente dividere per metà.

S' è possibile ciascuna di esse divida per metà l' altra in modo, che sia AE uguale ad EC, e BE ad ED; si ritrovi il centro del cerchio ABCD, che
* 1. III. sia F *, e si unisca EF.

E poichè la linea retta FE tirata per lo centro divide per metà l' altra linea retta AC non tirata
* 3. III. per lo centro, la dividerà ad angoli retti *: è perciò retto l' angolo FEA. Similmente, poichè la linea retta FE divide per metà l' altra linea retta BD, che non passa per lo centro, la dividerà ad angoli retti; quindi è retto l' angolo FEB. Ma si è dimostrato anche retto l' angolo FEA; dunque l'angolo FEA sarà uguale all' altro FEB: il minore al maggiore; il che è impossibile. Per la qual cosa le AC, BD non si dividono scambievolmente per metà.

E quindi se s' interseghino in un cerchio due linee rette, non tirate per lo centro, non si potranno scambievolmente dividere per metà. C.B.D.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Se due cerchi s' interseghino, non avranno lo stesso centro.

S' interseghino i due cerchi ABC, CDG nei punti B, C: dico ch' essi non avranno lo stesso centro. *fig. 67.*

S' è possibile, sia E il loro centro comune; si unisca EC, e si tiri comunque EFG. E poichè E è il centro del cerchio ABC, sarà CE uguale ad EF. Similmente, essendo E il centro del cerchio CDG, CE è uguale ad EG. Ma si è dimostrata CE uguale ad EF; perciò sarà EF uguale ad EG: la minore alla maggiore; il che è impossibile. Dunque non è E il centro dei cerchi ABC, CDG.

E perciò se due cerchi s'interseghino, non avranno lo stesso centro. C.B.D.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Se due cerchi si tocchino l' un l'altro, al di dentro, non avranno lo stesso centro.

I due cerchi ABC, CDE si tocchino l'un l'altro, al di dentro in C: dico che essi non avranno lo stesso centro. *fig. 68.*

S' è possibile, sia questo F; si unisca FC, e si

tiri comunque FEB. E poichè F è il centro del cerchio ABC, CF è uguale ad FB: e per la stessa ragione, essendo F il centro del cerchio CDE, CF è uguale ad FE. Ma si è dimostrata CF uguale ad FB; dunque FE è uguale ad FB; la minore alla maggiore, il che è impossibile. Quindi non è F il centro dei cerchi ABC, CDE.

E perciò se due cerchi si tocchino l'un l'altro, al di dentro, non avranno lo stesso centro. C.B.D.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Se nel diametro di un cerchio si prenda un punto qualunque, che non sia però il centro del cerchio, e da esso cadano nella circonferenza più linee rette; la massima sarà quella nella quale è allogato il centro; l'altra parte del diametro sarà la minima: delle altre poi, la più vicina a quella, che passa per lo centro sarà sempre maggiore della più lontana; e ciascuna incidente da una parte della minima non potrà averne, che un' altra sola uguale dall' altra parte dell' istessa minima.

fig. 69. Sia il cerchio ABCD, ed AD un diametro di esso, nel quale si prenda un punto F, che non sia il centro del cerchio; sia poi E un tal centro, e dal punto F cadano nella circonferenza ABCD più linee rette FB, FC, FG: dico che FA sia la massima, ed FD la minima: delle altre poi, che FB

sia maggiore di FC, ed FC maggiore di FG.

Imperocchè si uniscano le BE, CE, GE. E perchè due lati di ogni triangolo sono maggiori del terzo, saranno le BE, EF maggiori di BF. Ma è poi AE uguale ad EB; dunque le BE, EF sono uguali ad AF; e quindi AF è maggiore di BF. Similmente poichè BE è uguale ad EC, ed FE è comune; le due BE, EF sono uguali alle due CE, EF; ma l'angolo BEF è maggiore dell'angolo CEF; quindi la base BF è maggiore della base FC*: * 24. I.
e per la stessa ragione anche CF è maggiore di FG. Or poichè le GF, FE sono maggiori di GE, ed è poi GE uguale ad ED, saranno le GF, FE maggiori di ED: se ne tolga di comune EF, e sarà la rimanente GF maggiore della rimanente FD. Quindi FA è la massima, ed FD la minima; ed è pure BF maggiore di FC, e CF maggiore di FG.

Dico di più che ciascuna delle incidenti dal punto F alla circonferenza ABCD, da una parte della minima FD, ne può avere solamente un'altra uguale dall'altra parte della stessa minima.

Si costituisca alla linea retta EF, ed al punto E dato in essa, l'angolo FEH uguale all'angolo GEF *, e si unisca FH. E poichè GE è uguale * 23. I.
ad EH, ed EF è comune, le due GE, EF sono uguali alle due HE, EF; anche l'angolo GEF è uguale all'angolo HEF; dunque la base FG è uguale alla base FH *. Dico inoltre che dal punto F non * 4. I.
cade alla circonferenza altra linea retta uguale alla FG. Poichè, se può succedere, vi cada FK: ed essendo FK uguale ad FG, ed FG uguale ad FH; sa-

rà FK uguale ad FH; vale a dire la più vicina a quella, che passa per lo centro sarebbe uguale all'altra, che n'è più lontana, il che è impossibile.

Se dunque in un diametro di un cerchio, si prenda un qualunque punto, che non sia il centro del cerchio, ed il resto come nell'enunciazione. C.B.D.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Se fuori di un cerchio si prenda un punto, e da esso al cerchio si tirino più linee rette, delle quali una passi per lo centro, le altre poi cadano comunque: di tutte le linee rette, che cadono nella circonferenza concava, la massima è quella che passa per lo centro; e delle altre la più vicina a quella, che passa per lo centro è sempre maggiore della più lontana. Di quelle poi, che cadono nella circonferenza convessa, la minima è quella, che prodotta passerebbe per lo centro; e delle rimanenti, la più vicina alla minima è sempre minore della più lontana. Finalmente ciascuna incidente da una parte della minima non potrà averne, che un' altra sola uguale dall' altra parte della stessa minima.

fig. 70. Sia il cerchio ABC, e fuori di esso si prenda un qualunque punto D, dal quale si tirino al cerchio le linee rette DA, DE, DF, DC, e passi la DA per lo centro: dico che di quelle, che cadono nella circonferenza concava AEFC, la massima sia DA, che passa per lo centro, e la minima DG, che pro-

lungata passerebbe per lo centro: che sia inoltre DE maggiore di DF, e DF maggiore di DC. Delle altre poi, che cadono nella circonferenza convessa HLKG, quella, ch' è più vicina alla minima DG sarà sempre minore della più lontana; cioè sarà DK minore di DL, e DL minore di DH.

Imperocchè si prenda il centro del cerchio ABC, che sia M, e si uniscano le ME, MF, MC, MH, ML, MK: e perchè AM è uguale ad ME, se si aggiunga a ciascuna di esse MD; sarà AD uguale alle EM, MD. Ma le EM, MD sono maggiori di ED: dunque anche AD è maggiore di ED. Per l' istessa ragione, poichè ME è uguale ad MF, se a ciascuna di esse si aggiunga MD, saranno le EM, MD uguali alle MF, MD: ma l' angolo EMD è maggiore dell' angolo FMD; dunque la base ED sarà maggiore della base FD *. Dimostreremo similmente, che anche FD * 24. I
sia maggiore di CD: quindi DA è la massima; ed è poi DE maggiore di DF, e DF di DC. Inoltre poichè le MK, KD sono maggiori di MD, ed MG è uguale ad MK; sarà la rimanente KD maggiore della rimanente GD; e perciò GD è la minima. E poichè dagli estremi del lato MD del triangolo MLD, si sono condotte dentro di esso le due linee rette MK, KD; queste saranno minori delle ML, LD *. * 21. I
Ma MK è uguale ad ML; dunque la rimanente DK è minore della rimanente DL. Nel modo stesso si dimostrerà, che DL sia minore di DH; dunque DG è la minima; ed è poi DK minore di DL, e DL minore di DH.

Dico di più che ciascuna delle incidenti nella circonferenza, da una parte della minima, ne possa

avere solamente un' altra uguale dall' altra parte della stessa minima.

Si costituisca alla linea retta MD, ed al punto M dato in essa l' angolo DMB uguale all' angolo KMD, e si unisca DB. E poichè MK è uguale ad MB, ed MD è comune; le due KM, MD sono uguali alle due BM, MD, ciascuna a ciascuna: ma anche l' angolo KMD è uguale all' angolo BMD; dun-
* 4. 1 que la base DK è uguale alla base DB*. Dico inoltre che dal punto D non possa cadere nel cerchio altra linea retta uguale a DB. Poichè, se può essere, vi cada DN: e perchè DK è uguale sì a DN, che a DB, sarà anche DB uguale a DN; vale a dire la più vicina alla minima uguale alla più lontana, il che si è dimostrato impossibile.

Se dunque fuori di un cerchio si prenda un punto, e 'l resto come nell' enunciazione. C.B.D.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Se dentro di un cerchio si prenda un punto, e da questo cadano nella circonferenza più di due linee rette uguali; il punto che si prende sarà il centro del cerchio.

fig. 71. - Sia il cerchio ABC, e dentro di esso si prenda un punto D, dal quale cadano nella circonferenza più di due linee rette uguali, vale a dire le DA, DB, DC: dico che il punto D sia il centro del cerchio ABC.

Poichè, s'è possibile, questo centro non sia D, ma E; ed unita DE si prolunghi fino ai punti F, e G; sarà quindi FG un diametro del cerchio ABC. E perchè in un tal diametro si è preso un punto D, che non è il centro del cerchio; sarà DG la massima, e DC maggiore di DB, DB di DA *. Ma queste sono uguali, il che è impossibile; quindi non può essere E il centro del cerchio ABC. Dimostreremo similmente, che verun altro punto possa essere il centro, eccetto D; perciò D è il centro del cerchio ABC. * 7. III

E perciò se dentro di un cerchio si prenda un punto, e da esso cadano nella circonferenza più di due linee rette uguali; il punto che si prende sarà il centro del cerchio. C.B.D.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

Un cerchio non sega un altro cerchio in più di due punti.

N. B. Ciò deve intendersi delle circonferenze.

Se può succedere, il cerchio ABG seghi l' altro DEF in più di due punti, vale a dire in B, G, ed F, e preso il centro K del cerchio ABC, si uniscano le KB, KG, KF. fig. 72.

E poichè si è preso dentro del cerchio DEF un punto K, e da esso cadono nella circonferenza DEF più di due linee rette uguali KB, KG, KF; il punto K sarà il centro del cerchio DEF *; * 9. III

Ma K è anche il centro del cerchio ABC ; quindi due cerchi , che si intersegano avrebbero il centro
* 5. III stesso , il che è impossibile *.

E perciò un cerchio non sega un altro cerchio in più di due punti . C.B.D.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

Se due cerchi si tocchino al di dentro , e prendansi i loro centri ; la linea retta, che unisce questi centri , prolungata , passerà per lo contatto di essi cerchi .

fig. 73. I due cerchi ABC, ADE si tocchino al di dentro in A , e prendasi il centro del cerchio ABC , che sia F , e del cerchio ADE il centro G : dico che la linea retta tirata da G ad F , se si prolunghi , passerà per A .

Poichè , se può succedere , cada come la FGDH, e si uniscano le AF, AG . E perchè le AG, GF
* 20. I sono maggiori di AF * , o sia di FH ; se ne tolga di comune FG , e sarà la rimanente AG maggiore della rimanente GH . Ma AG è uguale a GD : dunqne GD è maggiore di GH : la minore della maggiore; il che è impossibile . Quindi la linea retta tirata dal punto F all' altro G , prolungata non cadrà fuori del contatto A ; e perciò necessariamente vi dovrà passare .

Se dunque due cerchi si tocchino al di dentro , e prendansi i loro centri; la linea retta , che unisce questi centri, se si prolunghi, passerà per lo contatto di essi cerchi. C.B.D.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

Se due cerchi si tocchino al di fuori; la linea retta che unisce i loro centri passerà per lo contatto.

I due cerchi ABC, ADE si tocchino al di fuori in A; e si prenda il centro del cerchio ABC, che sia F, come pure il centro G dell' altro cerchio ADE: dico che la linea retta, che si tira dal punto F all' altro G dovrà passare per lo contatto A. *fig.* 74.

Poichè se può succedere, cada come FCDG, e si uniscano le FA, AG. Or essendo F il centro del cerchio ABC, sarà AF uguale ad FC. Per la stessa ragione, poichè G è il centro del cerchio ADE, sarà AG uguale a GD. Ma si è dimostrata AF uguale ad FC: dunque le FA, AG sono uguali alle FC, DG; e quindi tutta FG è maggiore delle FA, AG. Ma n'è anche minore *; il che è impossibile. Quindi la linea retta tirata da F a G dovrà necessariamente passare per lo contatto A * 20. I

Se dunque due cerchi si tocchino al di fuori; la linea retta, che unisce i loro centri passerà per lo contatto. C.B.D.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Un cerchio non può toccare un altro cerchio in più di un punto, o che lo tocchi al di dentro, o al di fuori.

fig. 75. S' è possibile, il cerchio ABDC tocchi l' altro cerchio EBFD, prima al di dentro in più di un
n. 1. punto, vale a dire in B, e D: si prenda il centro G del cerchio ABDC, e 'l centro H dell' altro cerchio EBFD; dovrà la linea retta, che si tira dal punto
* 11. III G all' altro H, passare per gli punti B, e D *: cada come la BGHD. E poichè G è il céntro del cerchio ABDC, sarà BG uguale a GD: quindi BG è maggiore di HD; e perciò BH è molto maggiore di HD. Similmente poichè H è il centro del cerchio EBFD, BH è uguale ad HD. Ma BH si è poc' anzi dimostrata molto maggiore di HD, il che è impossibile. Dunque un cerchio non tocca un altro cerchio, al di dentro in più di un punto.

Dico che nè tampoco ciò possa avvenire toccan-
n. 2. dolo al di fuori. Perchè se può succedere, il cerchio ACK tocchi il cerchio ABDC al di fuori in più di un punto, cioè a dire in A, e C, e si unisca AC: ed essendosi presi nella circonferenza del cerchio ACK due punti qualunque A, e C; la linea retta, che gli unisce dovrà cadere dentro di questo
* 2. III cerchio *. Ma il cerchio AKC è fuori del cerchio
* d.3.III ABC *; quindi anche la linea retta AC è fuori del cerchio ABC. Or poichè i punti A e C sono pure nella circonferenza di questo cerchio ABC, la linea retta

AC deve anche cadere dentro di esso, il che è impossibile. Non è dunque vero, che un cerchio tocchi al di fuori un altro cerchio in più di un punto. Si è anche dimostrato, che ciò nè anche avvenga toccandolo al di dentro.

Dunque un cerchio non può toccare un altro cerchio in più di un punto, o che lo tocchi al di dentro, o al di fuori. C.B.D.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Nel cerchio le linee rette uguali sono ugualmente distanti dal centro; e quelle linee rette, che sono ugualmente distanti dal centro sono uguali.

Sia il cerchio ABDC, ed in esso le linee rette uguali AB, CD: dico che queste sieno ugualmente distanti dal centro. *fig.* 76.

Prendasi il centro del cerchio ABDC, che sia E, da esso si tirino le EF, EG perpendicolari alle AB, CD, e poi si uniscano le AE, EC. E poichè la linea retta EF tirata per lo centro, divide l' altra AB non tirata per lo centro ad angoli retti, la dividerà per metà *; perciò AF è uguale ad FB; * 3. III e quindi AB è doppia di AF: e per la stessa ragione anche CD è doppia di CG. Ma AB è uguale a CD; dunque anche AF è uguale a CG. Or essendo AE uguale ad EC, sarà il quadrato di AE uguale a quello di EC. Ma al quadrato di AE vi sono uguali i quadrati di AF, e di FE, perchè è retto l' angolo in F *; ed al quadrato di EC, * 47. I

sono similmente uguali i quadrati di EG, e di GC per esser retto l' angolo in G. Perciò i quadrati di AF, e di FE sono uguali agli altri di CG, e di GE: è poi il quadrato di AF uguale a quello di CG, perchè AF è uguale a CG; quindi il rimanente quadrato di EF è uguale al rimanente quadrato di EG; per lo che FE è uguale ad EG. Or le linee rette tirate dentro di un cerchio diconsi esser ugualmente distanti dal centro, quando le perpendicolari tirate dal centro su di esse sono uguali * ; dunque le AB, CD sono ugualmente distanti dal centro.

* d.4. III

Sieno ora le AB, CD ugualmente distanti dal centro, cioè sia FE uguale a EG: dico che AB sia anche uguale a CD.

Imperocchè, fatta la stessa costruzione, dimostreremo similmente, che AB sia doppia di AF, e CD doppia di CG. E poichè AE è uguale ad EC, anche il quadrato di AE è uguale a quello di EC. Ma al quadrato di AE sono uguali i quadrati di EF, e di FA; ed a quello poi di EC sono uguali gli altri di EG, e di GC: dunque i quadrati di EF, e di FA sono uguali ai quadrati di EG, e di GC; e perciò essendo il quadrato di EG uguale a quello di EF, perchè EG è uguale ad EF; sarà anche il rimanente quadrato di AF uguale al rimanente quadrato di CG; e quindi la linea retta AF è uguale all'altra CG. Ma AB è doppia di AF, e CD di CG: perciò anche AB è uguale a CD.

Laonde nel cerchio le linee rette uguali sono ugualmente distanti dal centro; e quelle linee rette, che sono ugualmente distanti dal centro sono uguali. C.B.D.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Di tutte le linee rette, che si tirano in un cerchio, la massima è il diametro; delle altre poi sempre la più vicina al centro è maggiore della più lontana.

Sia il cerchio ABCD, AD il suo diametro, ed E il centro; più prossima poi al centro sia BC, più lontana FG: dico che AD sia la massima, e che BC sia maggiore di FG. *fig.* 77.

Si tirino dal centro sopra le BC, FG le perpendicolari EH, EK *. * 12. I.

E poichè BC è più prossima al centro, e n'è più lontana FG, sarà EK maggiore di EH*: si ponga perciò EL uguale ad essa EH, e tirata per L la LM perpendicolare ad EK, si prolunghi in N. Ed essendo EH uguale ad EL, sarà pure BC uguale ad MN *: si uniscano le EM, EN, EF, EG. E poichè AE è uguale ad EM, ed ED ad EN; sarà AD uguale alle ME, EN. Ma le ME, EN sono maggiori di MN *; perciò anche AD sarà maggiore di MN. Or le due EM, EN sono uguali alle due FE, EG; ed è l'angolo MEN maggiore dell'angolo FEG: quindi sarà la base MN maggiore della base FG*. Ma si è dimostrata MN uguale a BC; dunque anche BC è maggiore di FG. * d.5. III. * 14. III. * 20. I. * 24. I.

E perciò di tutte le linee rette, che si tirano in un cerchio, la massima è il diametro; delle altre poi

sempre la più vicina al centro è maggiore della più lontana. C.B.D.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

La perpendicolare, che si tira al diametro di un cerchio da un suo estremo, cade fuori del cerchio; e non potrà condursi altra linea retta tra la circonferenza, e *la detta perpendicolare*; o, *ch'è lo stesso*, *la circonferenza del cerchio passa tra la linea retta*, *ch' è perpendicolare al diametro*, *e quell' altra linea retta, che comprende col diametro un angolo acuto quanto si voglia grande*, o *che comprende un angolo quanto si voglia piccolo colla perpendicolare al diametro*.

fig. 78. Sia il cerchio ABC intorno al centro D, ed AB il suo diametro: dico che la linea retta, che dal punto A si tira perpendicolare ad AB, cada fuori del cerchio.

Poichè, s'è possibile, cada dentro, come AC, ed uniscasi DC: E poichè DA è uguale a DC, sarà
* 5. I. pure l'angolo DAC uguale all'altro ACD *. Ma l'angolo DAC è retto; dunque anche l' altro ACD sarà retto: e perciò i due angoli DAC, ACD sono
* 52. I. uguali a due retti; il che è impossibile *. Quindi la perpendicolare tirata a BA dal punto A, non cadrà dentro del cerchio. Dimostreremo similmente, che nè anche cada nella circonferenza; quindi dovrà necessariamente cader fuori, come la AE.

Dico che da un tal punto A non può condursi un'altra linea retta tra AE, e la circonferenza ABC. Poichè, se può essere, se ne tiri un' altra, e sia FA; e dal punto D si abbassi sopra essa la perpendicolare DG. Or è retto l'angolo AGD, e perciò l'altro DAG è minore del retto; sarà quindi AD maggiore di DG *. Ma DA è uguale a DH; dun- * 19. I.
que DH è maggiore di DG: la minore della maggiore; il che è impossibile. Perciò da un tal punto non può condursi un' altra linea retta tra la circonferenza, e la perpendicolare AE: o, ch'è lo stesso, la circonferenza del cerchio passa tra la linea retta, ch'è perpendicolare al diametro, e quell'altra linea retta, che comprende col diametro un angolo acuto quanto si voglia grande, o che comprende un angolo quanto si voglia piccolo colla perpendicolare al diametro.

Cor. È manifesto da ciò, che la linea retta, che si tira perpendicolare al diametro di un cerchio da un suo estremo, tocchi il cerchio: e che una linea retta tocchi il cerchio solamente in un punto; poichè quella, che lo incontra in due punti, cade dentro di esso, come si è dimostrato *. Ed inoltre * p.2.III.
che una sola linea retta possa toccare il cerchio in un punto stesso.

PROPOSIZIONE XVII.

PROBLEMA.

Da un punto dato nella circonferenza di un dato cerchio, o fuori di esso, tirare una linea retta, che tocchi un tal cerchio.

fig. 79. Sia dato il cerchio BCD, e primieramente nella sua circonferenza il punto D, per lo quale si vuol tirare una linea retta, che tocchi un tal cerchio.

Si ritrovi il centro E del cerchio, e si congiunga il raggio ED, al quale si tiri dal suo estremo D la perpendicolare DF; sarà questa la tan-
* 16. III. gente cercata *.

Che se il punto dato sia fuori del cerchio BCD, come appunto lo è il punto A; si prenda similmente il centro E del cerchio, e si congiunga AE: poi col centro E intervallo EA si descriva il cerchio AFG; indi dal punto D si tiri DF perpendicolare ad EA, e si uniscano le EBF, AB: dico che dal punto A si sia tirata AB, la quale tocca il cerchio BCD.

Poichè E è il centro dei cerchi BCD, AFG, sarà EA uguale ad EF, ed ED ad EB. Quindi le due AE, EB sono uguali alle due FE, ED: contengono di più un angolo comune, ch'è quello in E; dunque la base DF è uguale alla base AB, il triangolo DEF è uguale al triangolo EBA, ed i rimanenti angoli sono uguali ai rimanenti angoli; perciò l'angolo EBA è uguale all'angolo EDF. Ma EDF è retto; dunque anche retto è l'altro EBA: or EB è un raggio; e quella linea retta, che si tira

perpendicolare al diametro di un cerchio da un suo estremo, tocca il cerchio * : dunque AB tocca il cerchio BCD. * 16. III.

E quindi da un punto dato nella circonferenza del cerchio BCD, o fuori di esso, si è tirata una linea retta, che tocca un tal cerchio. C.B.F.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Se una linea retta tocchi un cerchio, e dal centro si tiri al contatto un' altra linea retta, questa sarà perpendicolare alla tangente.

La linea retta DE tocchi il cerchio ABC nel punto C; e prendasi il centro F di questo cerchio, dal quale si tiri al punto C la FC: dico che FC sia perpendicolare a DE. *fig.* 80.

Poichè, se non l'è, dal punto F si tiri FG perpendicolare a DE. Ed essendo retto l'angolo FGC, sarà acuto l' altro GCF; e perciò l' angolo FGC è maggiore dell' altro FCG. Ma il maggior angolo di ogni triangolo è sotteso dal lato maggiore *; quindi FC è maggiore di FG: ed è poi FC uguale ad FB; dunque FB è maggiore di FG; la minore della maggiore, il che è impossibile. Perciò FG non è perpendicolare a DE. Dimostreremo similmente, che verun' altra lo sia, oltre FC: quindi FC è perpendicolare a DE. * 19. I.

E perciò se una linea retta tocchi un cerchio, e dal centro al contatto si tiri un' altra linea retta, questa sarà perpendicolare alla tangente. C.B.D.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

Se una linea retta tocchi un cerchio, e dal contatto si tiri una perpendicolare alla tangente; in questa dovrà essere allogato il centro del cerchio.

fig. 81. La linea retta DE tocchi in C il cerchio ABC, e dal punto C si tiri a DE la perpendicolare CA: dico che il centro del cerchio sia allogato in questa CA.

Non sia così; ma, se può succedere, sia F un tal centro, ed uniscasi CF. E poichè la linea retta DE tocca il cerchio ABC, e dal contatto al centro
* 18. III. si è tirata FC; sarà FC perpendicolare a DE *: quindi l' angolo FCE è retto. Ma è anche retto l'altro ACE; dunque l'angolo FCE è uguale all'altro ACE: il minore al maggiore; il che è impossibile. Non è dunque F il centro del cerchio ABC. Dimostreremo similmente, che non lo sia verun altro punto, il quale esista fuori della AC.

Perciò se una linea retta tocchi un cerchio, e dal contatto si tiri una perpendicolare alla tangente; in questa sarà allogato il centro del cerchio. C.B.D.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

Nel cerchio l' angolo al centro è doppio dell' angolo alla circonferenza, quando abbiano per base lo stesso arco.

Sia il cerchio ABC, al cui centro vi stia l'angolo BEC, e l' altro BAC alla sua circonferenza; e questi abbiano per base lo stesso arco BC: dico che l'angolo BEC sia doppio dell'altro BAC. *fig* 82.

In primo luogo il centro E sia dentro dell'angolo BAC, e si unisca AE, la quale si produca in F. E poichè EA è uguale ad EB; sarà anche l'angolo EAB uguale all' angolo EBA: e perciò gli angoli EAB, EBA sono il doppio dell' angolo EAB. Ma l' angolo BEF è uguale agli angoli EAB, EBA *; dunque l' angolo BEF è doppio dell' angolo EAB. Per la stessa ragione anche l'angolo FEC è doppio dell' altro EAC; quindi tutto l' angolo BEC sarà doppio di tutto l' altro BAC. *n.* 1. * 32. I.

Che se il centro E sia fuori dell'angolo BDC; si unisca pure DE, e si prolunghi in G. Dimostreremo similmente esser l' angolo GEC doppio dell' altro EDC. Ma anche GEB è doppio di EDB; quindi sarà il rimanente BEC doppio del rimanente BDC. *n.* 2.

E perciò nel cerchio l' angolo al centro è doppio di quello alla circonferenza, quando hanno per base l' arco stesso. C.B.D.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

Gli angoli nello stesso segmento di cerchio sono tra di loro uguali.

fig. 85. Sia il cerchio ABCDE, e nello stesso segmento BAED vi sieno gli angoli BAD, BED: dico esser questi tra di loro uguali.

Si prenda il centro del cerchio ABCDE, che sia
n. 1. F; e se il segmento BAED è maggiore del semicerchio, si uniscano le BF, FD. E poichè l'angolo BFD è al centro, e l'altro BAD alla circonferenza, ed hanno essi per base lo stesso arco BCD;
* 20. III. sarà l'angolo BFD doppio dell'angolo BAD *. Per la stessa ragione l'angolo BFD è anche doppio dell'angolo BED; quindi l'angolo BED sarà uguale all'altro BAD.

n. 2 Che se poi il segmento BAED nel quale sono gli angoli BAD, BED non è maggiore del semicerchio, si tiri AF al centro F, e prodottala in C, si unisca EC: sarà quindi il segmento BAEC maggiore del semicerchio; e perciò saranno uguali gli angoli BAC, BEC, che sono in esso. Per l'istessa ragione sono anche uguali gli angoli CAD, CED, che sono nel segmento DABC maggiore del semicerchio; e perciò tutto l'angolo BAD è uguale a tutto l'altro BED.

Quindi gli angoli nello stesso segmento di cerchio sono tra di loro uguali C.B.D.

PROPOSIZIONE XXII.

Teorema.

Gli angoli opposti dei quadrilateri, che descrivonsi in un cerchio sono uguali a due retti.

Sia il cerchio ABCD, ed in esso siavi descritto il quadrilatero ABCD: dico che gli angoli opposti di un tal quadrilatero sieno uguali a due retti. *fig.* 84.

Si uniscano le AC, BD. E poichè i tre angoli di ogni triangolo sono uguali a due retti *; saranno i tre angoli CAB, ABC, BCA del triangolo ABC uguali a due retti. Ma l' angolo CAB è uguale all' angolo BDC, perchè sono nello stesso segmento BADC*, e similmente l' angolo ACB è uguale all'altro ADB, per essere nel medesimo segmento ADCB; quindi tutto l' angolo ADC è uguale agli angoli BAC, ACB: vi si aggiunga di comune l' angolo ABC; e saranno gli angoli ABC,BAC,ACB uguali agli angoli ABC, ADC. Ma gli angoli ABC, BAC, ACB, sono uguali a due retti *; perciò anche gli angoli ABC, ADC saranno uguali a due retti. Dimostreremo similmente, che sieno uguali a due retti gli angoli BAD, DCB.

* 32. I.

* 21. III.

* 32. I.

Dunque gli angoli opposti dei quadrilateri, che si descrivono in un cerchio sono uguali a due retti. C.B.D.

PROPOSIZIONE. XXIII.

TEOREMA.

Sopra una stessa linea retta, ed alla medesima parte di essa, non si possono costituire due segmenti di cerchio simili, e disuguali.

fig. 85. Se può avvenire, sopra la stessa linea retta AB, si costituiscano, alla medesima parte, i due segmenti di cerchio ACB, ADB, che sieno simili, e disuguali; si tiri ACD, e si uniscano le CB, BD. E poichè il segmento ACB è simile all'altro ADB, e che i segmenti simili di cerchio sono quelli, che contengono angoli uguali; sarà l' angolo ACB uguale all' altro ADB:

* 16. I l' esteriore all' interiore; il che non può essere *.

E perciò non si possono costituire sopra una stessa linea retta, ed alla medesima parte di essa, due segmenti di cerchio simili, e disuguali. C.B.D.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

I segmenti simili di cerchio costituiti sopra linee rette uguali sono tra di loro uguali.

fig. 86. Sieno costituiti sopra le uguali linee rette AB, CD i segmenti simili di cerchio AEB, CFD: dico che il segmento AEB sia uguale all' altro CFD.

Imperocchè se s' intenda applicato il segmento

AEB sull' altro CFD, in maniera, che il punto A cada sull' altro C, e la linea retta AB sulla CD; dovrà cadere anche il punto B in D, perchè AB è uguale a CD: e perciò, combaciando la linea retta AB coll' altra CD, anche il segmento AEB dovrà combaciare col segmento CFD *; e per conseguenza gli sarà uguale. * 33. III.

E quindi i segmenti simili di cerchio costituiti sopra linee rette uguali sono tra di loro uguali C.B.D.

PROPOSIZIONE XXV.

PROBLEMA.

Dato un segmento di cerchio, descrivere quel cerchio di cui è segmento.

Sia dato il segmento di cerchio ABC: fa d' uopo descrivere il cerchio, di cui ABC è segmento. *fig.* 87.

Si divida AC per metà in D: poi dal punto D si tiri DB perpendicolare ad essa AC, e si unisca AB; sarà l' angolo ABD o uguale all'altro BAD, o pure ineguale.

Sia primieramente l' angolo ABD uguale all' angolo BAD, sarà anche AD uguale a BD *, e quindi a DC. Per lo che, essendo tra loro uguali le tre linee rette AD, DB, DC, sarà D il centro del cerchio: e quindi se col centro D, intervallo DA, o DB, o DC si descriva il cerchio, questo passerà anche per gli altri punti, e si sarà descritto il cerchio, di cui ABC è segmento. E perchè il cen- * 5. I.

tro D è allogato nella AC, il segmento ABC sarà semicerchio.

n. 2, 3 Che se poi gli angoli ABD, BAD sieno disuguali: si costituisca alla linea retta AB, ed al punto A
* 23. I. in essa l'angolo BAE uguale all'altro ABD *; poi si prolunghi, se bisogna, DB in E, e si unisca EC. E poichè l'angolo ABE è uguale all'angolo BAE, sarà
* 5. I. la linea retta BE uguale all'altra EA *. Or AD è uguale a DC, e DE è comune; quindi le due AD, DE sono uguali alle due CD, DE, ciascuna a ciascuna; anche l'angolo ADE è uguale all'angolo CDE, poichè ciascuno è retto: dunque la base AE è uguale
* 4. I. alla base EC *. Ma si è anche dimostrata AE uguale ad EB: perciò le tre linee rette AE, EB, EC sono uguali tra loro; e quindi E è il centro del
* 9. III. cerchio *. Laonde se descrivasi il cerchio col centro E, e con un intervallo uguale ad una delle AE, EB, EC, un tal cerchio passerà anche per gli rimanenti punti, e sarà quello che cercavasi. Ed è manifesto, che se l'angolo ABD sia maggiore dell'angolo BAD, il centro E debba cadere fuori del segmento ABC, il quale sarà perciò minore del semicerchio; che se poi l'angolo ABD sia minore dell'altro BAD, il centro E cadrà dentro del segmento ABC, il quale sarà perciò maggiore del semicerchio.

Dunque dato un segmento di cerchio, si è descritto il cerchio di cui è segmento, C.B.F.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA.

Nei cerchi uguali, gli angoli uguali insistono sopra archi uguali, o che gli angoli stiano ai centri, o pure che stiano alle circonferenze.

Sieno i cerchi uguali ABC, DEF, ed in essi gli angoli uguali BGC, EHF, posti ai centri, gli altri BAC, EDF posti alle circonferenze: dico che l'arco BKC sia uguale all' altro ELF. *fig.* 88.

Si uniscano le BC, EF. E poichè i cerchi ABC, DEF sono uguali, saranno anche uguali i loro raggi *: quindi le due BG, GC sono uguali alle due altre EH, HF: ma è pure l' angolo in G uguale all' angolo in H; dunque la base BC è uguale alla base EF *. Or essendo l' angolo in A uguale a quello in D, il segmento BAC sarà simile al segmento EDF *. Ma sono anche costituiti sulle linee rette uguali BC, EF: ed i segmenti simili di cerchio costituiti sopra linee rette uguali sono uguali *; perciò il segmento BAC è uguale al segmento EDF. Per la qual cosa essendo tutto il circolo ABC uguale a tutto il circolo DEF, anche il rimanente segmento BKC dovrà essere uguale al rimanente ELF; e perciò l' arco BKC sarà uguale all' arco ELF.

* d.1.III. * 4. » * d.11.III * 24. III.

Dunque nei cerchi uguali, gli angoli uguali insistono sopra archi uguali, o che stiano ai centri, o pure che stiano alle circonferenze. C.B.D.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA.

Nei cerchi uguali, gli angoli che insistono sopra archi uguali sono tra loro uguali, o che stiano ai centri, o pure, che stiano alle circonferenze.

fig. 89. Nei cerchi uguali ABC, DEF, sopra gli uguali archi BC, EF, v' insistano gli angoli BGC, EHF ai centri, e gli altri BAC, EDF alle circonferenze: dico che l' angolo BGC sia uguale all' angolo EHF, e l' angolo BAC all' angolo EDF.

Primieramente è chiaro, che se l'angolo BGC sia uguale all' angolo EHF; anche l' angolo BAC do-
* 20. III. vrà essere uguale all' angolo EDF *. Se dunque non è così, uno di quei primi angoli è il maggiore: sia il maggiore BGC, e si costituisca alla linea retta BG, ed al punto G in essa l' angolo BGK uguale all' angolo EHF. E poichè gli angoli uguali
* 26. III. posti ai centri, insistono sopra archi uguali *; dovrà essere l' arco BK uguale all' altro EF. Ma EF è uguale a BC; quindi anche BK sarà uguale a BC: il minore al maggiore; il che è impossibile. Non è dunque l' angolo BGC disuguale all' angolo EHF; perciò gli è uguale. È poi l' angolo in A metà dell' angolo BGC; e dell' angolo EHF n'è metà l'angolo in D: quindi l' angolo in A è uguale all' altro in D.

Dunque nei cerchi uguali gli angoli, che insistono sopra archi uguali sono tra di loro uguali, o che stiano ai centri, o pure, che stiano alle circonferenze. C.B.D.

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA.

Nei cerchi uguali, le linee rette uguali tagliano archi uguali, il maggiore al maggiore, ed il minore al minore.

Sieno i cerchi uguali ABC, DEF, ed in essi le linee rette uguali BC, EF, le quali taglino gli archi maggiori BAC, EDF, ed i minori BGC, EHF: dico che sia l' arco maggiore BAC uguale al maggiore EDF, e l' arco minore BGC uguale al minore EHF. *fig.* 90.

Si prendano i centri K, ed L di essi cerchi, e si uniscano le BK, KC, EL, LF. E poichè i cerchi sono uguali, saranno anche uguali i loro raggi; perciò le due BK, KC sono uguali alle due EL, LF: ma anche la base BC è uguale alla base EF; quindi l' angolo BKC è uguale all' angolo ELF. Per la qual cosa dovendo gli angoli uguali posti ai centri insistere sopra archi uguali *; sarà l' arco BGC uguale all' arco EHF. E poichè tutt' il cerchio ABC è uguale a tutto l'altro EDF; dovrà il rimanente arco BAC essere uguale al rimanente EDF. * 26.III.

E perciò nei cerchi uguali, le linee rette uguali tagliano archi uguali, il maggiore al maggiore, ed il minore al minore. C.B.D.

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA.

Nei cerchi uguali, gli archi uguali sono sottesi da linee rette uguali .

fig. 90. Sieno i cerchi uguali ABC , DEF , e si prendano in essi gli archi uguali BGC , EHF , e poi si uniscano le BC , EF : dico che la linea retta BC sia uguale all' altra EF .

Si prendano i centri K , ed L di essi cerchi , e si congiungano le BK , KC , EL , LF . E poichè l' arco BGC è uguale all' arco EHF ; sarà anche
* 27. III l' angolo BKC uguale all' angolo ELF * . Ma sono uguali i cerchi ABC , DEF , e perciò i loro raggi sono anche uguali : quindi le due BK , KC sono uguali alle due EL , LF : contengono pure uguali angoli ; sarà dunque la base BC uguale alla base EF .

E perciò nei cerchi uguali, gli archi uguali sono sottesi da linee rette uguali . C.B.D.

PROPOSIZIONE XXX.

PROBLEMA.

Dato un arco di cerchio , dividerlo per metà .

fig. 91. Sia dato l' arco di cerchio ADB : fa d' uopo dividerlo per metà .

Si unisca AB, e si divida per metà in C : poi dal punto C si tiri CD perpendicolare ad AB, e si congiungano le AD, DB.

E poichè AC è uguale a CB, e CD è comune; le due AC, CD sono uguali alle due BC, CD, ciascuna a ciascuna. Ma anche l' angolo ACD è uguale all' angolo BCD, poichè ciascuno di essi è retto; dunque la base AD è uguale alla base DB. Or le linee rette uguali tagliano archi uguali, il maggiore al maggiore, ed il minore al minore *; ed è l' uno, e l' altro degli archi AD, DB minore del semicerchio: quindi l' arco AD sarà uguale all' arco DB. * 28.III

E perciò dato un arco di cerchio si è diviso per metà. C.B.F.

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA.

Nel cerchio, l' angolo nel semicerchio è retto; quello poi, ch' è in un segmento maggiore è minore del retto; e l' altro, ch' è nel segmento minore è maggiore del retto.

Sia il cerchio ABCD, e BC un diametro di esso, *fig.* 92. E il centro; si tiri CA, che divide il cerchio nei segmenti ABC, ADC, e si uniscano le BA, AD, DC: dico che sia retto l' angolo BAC, ch' è nel semicerchio; che quello, ch' è nel segmento ABC, maggiore del semicerchio, sia maggiore del retto; e minore del retto l' altro, ch' è nel segmento ADC minore del semicerchio.

Si congiunga AE, e si prolunghi BA in F. Ed essendo BE uguale ad EA, sarà anche l'angolo EAB
* 5. I. uguale all' angolo EBA *. Similmente poichè AE è uguale ad EC, sarà l' angolo ACE uguale all' angolo CAE: quindi tutto l' angolo BAC è uguale ai due angoli ABC, ACB. Ma è pure l'angolo FAC esteriore del triangolo ABC uguale ai due ABC,
* 32. I. ACB *; dunque l' angolo BAC è uguale all' angolo
* d.10. I. FAC, e perciò ciascuno di essi è retto *. Quindi l' angolo BAC nel semicerchio CAB è retto.

E poichè i due angoli ABC, BAC del triangolo
* 17. I. ABC sono minori di due retti*, e BAC è retto; sarà l' altro angolo ABC minore del retto: e questo è l' angolo nel segmento maggiore del semicerchio.

Or il quadrilatero ABCD essendo descritto nel cerchio, ed i quadrilateri descritti nei cerchi avendo gli
* 22. III. angoli opposti uguali a due retti *, saranno gli angoli ABC, ADC uguali a due retti. Ma l' angolo ABC è minore del retto; dunque il rimanente ADC sarà maggiore del retto: e questo è l' angolo nel segmento ADC minore del semicerchio.

E perciò nel cerchio, l' angolo nel semicerchio è retto; quello ch' è nel segmento maggiore è minore del retto; e l' altro ch' è nel segmento minore è maggiore del retto.

Cor. È manifesto da ciò, che se un angolo di un triangolo sia uguale ai due rimanenti, un tal angolo sia retto; perciocchè il suo conseguente è uguale agli stessi due altri; e quando gli angoli
* d.10. I. di quà, e di là sono uguali, sono retti *.

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA.

Se una linea retta tocchi un cerchio, e dal contatto si tiri un' altra linea retta, che lo seghi; gli angoli, che questa forma colla tangente saranno uguali a quelli costituiti nei segmenti alterni del cerchio.

La linea retta EF tocchi il cerchio ABCD in B, *fig.* 93.
e dal punto B si tiri in esso cerchio ABCD l' altra linea retta BD, che lo seghi: dico che gli angoli, che forma questa BD colla tangente EF sieno uguali a quelli, che sono costituiti nelle alterne porzioni del cerchio: vale a dire, che l'angolo FBD sia uguale all' angolo, che si costituisce nel segmento DAB, cioè ad esso DAB; e l' angolo EBD all' altro DCB, che si costituisce nel segmento DCB.

Si tiri dal punto B la perpendicolare BA ad EF; e preso nell' arco BD un qualsivoglia punto C, si uniscano le AD, DC, CB. E poichè la linea retta EF tocca il cerchio ABCD nel punto B, e dal contatto B si è tirata BA perpendicolare ad una tal tangente; il centro del cerchio dovrà essere allogato in questa BA*; e perciò BA è il diametro di un tal cer- * 19. III.
chio, e l' angolo ADB nel semicerchio è retto *. * 31. III.
Quindi i rimanenti angoli BAD, ABD sono uguali ad un retto *. Ma è anche retto l' angolo ABF; * 32. I.
dunque l' angolo ABF è uguale agli angoli BAD, ABD: se ne tolga di comune l' angolo ABD, e sarà

*

il rimanente angolo DBF uguale a quello, ch'è costituito nel segmento alterno del cerchio, cioè all' angolo BAD. E poichè il quadrilatero ABCD è descritto nel cerchio, i suoi angoli opposti sono uguali a due
* 22. III. retti *: e perciò gli angoli DBF, DBE sono uguali
* 13. I. agli angoli BAD, BCD *. Ma si è dimostrato l'angolo BAD uguale all' altro DBF; quindi il rimanente angolo DBE sarà uguale a quello, che si costituisce nel segmento alterno del cerchio, cioè all' angolo DCB.

Se dunque una linea retta tocchi un cerchio, e dal contatto si tiri un' altra linea retta, che lo seghi; gli angoli, che questa forma colla tangente saranno uguali a quelli costituiti nei segmenti alterni del cerchio. C.B.D.

PROPOSIZIONE XXXIII.

PROBLEMA.

Sopra una data linea retta descrivere un segmento di cerchio, il qual contenga un angolo uguale ad un angolo rettilineo dato.

fig. 94. Sia data la linea retta AB, e dato pure l'angolo rettilineo C: fa d' uopo descrivere sulla data linea retta AB un segmento di cerchio, il qual contenga un angolo uguale a C.

n. 1. Se l'angolo C è retto, si divida AB per metà in F, e col centro F, intervallo AF, o FB si descriva il semicerchio AEB: sarà l'angolo AEB nel
* 31. III. semicerchio uguale all'angolo retto C *.

Che se poi l'angolo C non è retto; allora si costituisca alla linea retta AB, ed al punto A in essa l'angolo BAD uguale all' angolo C, e si tiri dal punto A la perpendicolare AE alla linea retta AD: poi si divida AB per metà in F, dal punto F si tiri FG perpendicolare ad AB, e si unisca GB. E poichè AF è uguale ad FB, ed FG è comune; le due AF, FG sono uguali alle due BF, FG: è pure l'angolo AFG uguale all'angolo BFG; perciò la base AG è uguale alla base GB. Per la qual cosa il cerchio descritto col centro G intervallo AG, passerà anche per B: si descriva, e sia AEB. E poichè dall'estremo A del diametro AE gli si è tirata la perpendicolare AD; questa dovrà toccare il cerchio AEB *. Ma si è poi dal contatto A tirata l'altra linea retta AB, che lo sega; quindi l' angolo BAD è uguale a quello, che si costituisce nel segmento AHB alterno del cerchio *: e perciò essendo l'angolo BAD uguale all'angolo C; anche l'angolo, ch'è nel segmento AHB sarà uguale all' angolo C.

n. 2, 3.

* 16. III.

* 32. III.

Dunque sopra la data linea retta AB si è descritto il segmento di cerchio AHB, il qual contiene un angolo uguale al dato C. C.B.F.

PROPOSIZIONE XXXIV.

PROBLEMA.

Tagliare da un cerchio dato un segmento, che contenga un angolo uguale ad un dato angolo rettilineo.

fig. 95. Sia dato il cerchio ABC, e dato anche l'angolo rettilineo D: fa d'uopo tagliare dal cerchio ABC un segmento, che sia capace di un angolo uguale al dato D.

Si tiri la linea retta EF la quale tocchi il cer-
* 17. III. chio ABC in un punto B *; e poi si costituisca alla linea retta BF, ed al punto B in essa, l'angolo FBC uguale all' angolo D.

E poichè la linea retta EF tocca il cerchio ABC nel punto B, e dal contatto B si è tirata BC; sarà l'angolo FBC uguale a quello, che si costituisce
* 32. III. nel segmento alterno del cerchio*. Ma l'angolo FBC è uguale all' angolo D; dunque anche l'angolo, ch'è nel segmento BAC sarà uguale all' angolo D.

E perciò dal dato cerchio ABC si è tagliato il segmento BAC, che contiene un angolo uguale al dato angolo rettilineo D. C.B.F.

PROPOSIZIONE XXXV.

TEOREMA.

Se in un cerchio due linee rette si seghino scambievolmente; il rettangolo contenuto dai segmenti di una è uguale a quello, che si contiene dai segmenti dell' altra.

Si seghino scambievolmente nel cerchio ABCD le due linee rette AC, BD nel punto E: dico che il rettangolo contenuto da AE, ed EC sia uguale a quello, che si contiene da DE, ed EB. *fig.* 96.

Poichè se le AC, BD passino per lo centro, sicchè sia E il centro del cerchio ABCD, è manifesto, che essendo uguali le AE, EC, DE, EB, anche il rettangolo contenuto da AE, ed EC sia uguale a quello, che si contiene da DE, ed EB. *n.* 1.

Passi adesso una delle linee rette BD per lo centro, e seghi ad angoli retti in E l' altra AC, che non passa per lo centro. Si divida per metà la BD in F, e sarà F il centro del cerchio ABCD; indi si congiunga AF. E poichè la linea retta BD tirata per lo centro sega ad angoli retti l' altra linea retta AC, non tirata per lo centro; sarà AE uguale ad EC *. Or essendo la linea retta BD divisa in parti uguali in F, ed in parti disuguali in E; il rettangolo di BE in ED insieme col quadrato di EF è uguale al quadrato di FB *, o sia di FA. Ma al quadrato di FA sono pure uguali i quadrati di AE, e di EF *; perciò il rettangolo di *n.* 2. * 3. III. * 5. II. * 47. I.

BE in ED insieme col quadrato di EF è uguale ai quadrati di AE, e di EF: se ne tolga di comune il quadrato di EF; sarà il rimanente rettangolo di BE in ED uguale al rimanente quadrato di AE, cioè al rettangolo di AE in EC.

n. 3. Che se la BD, tirata per lo centro, non seghi ad angoli retti l' altra AC, non tirata per lo centro, nel punto E. Si divida anche BD per metà in F; sarà F il centro del cerchio: indi si unisca AF, e dal centro F si tiri ad AC la perpendicolare FG; sarà AG uguale a GC; e perciò il rettangolo di AE in EC insieme col quadrato di EG è uguale al qua-
* 5. 11. drato di AG*. Laonde se vi si aggiunga di comune il quadrato di GF, sarà il rettangolo di AE in EC insieme co' quadrati di EG, e di GF uguale ai quadrati di AG, e di GF. Ma ai quadrati di EG,
* 47. I. e di GF è uguale il quadrato di FE*; ed ai quadrati di AG, e di GF è uguale il quadrato di AF: quindi il rettangolo di AE in EC insieme col quadrato di FE è uguale al quadrato di AF, o sia di FB. Per l'istessa ragione anche il rettangolo di DE in EB insieme col quadrato di FE è uguale al quadrato di FB: perciò il rettangolo di AE in EC insieme col quadrato di FE è uguale al rettangolo di DE in EB insieme col quadrato di FE: e quindi togliendone di comune il quadrato di FE; sarà il rimanente rettangolo di AE in EC uguale al rimanente rettangolo di DE in EB.

n. 4. Finalmente nè l' una, nè l' altra delle AC, BD passi per lo centro F del cerchio ABCD. Si tiri per lo punto E, ove s' intersegano quelle linee rette, il diametro GEFH. E poichè il rettan-

golo di AE in EC si è dimostrato uguale all' altro di GE in EH; e che a quest' istesso rettangolo di GE in EH è pure uguale quello di BE in ED; sarà il rettangolo di AE in EC uguale a quello di BE in ED.

E quindi se in un cerchio due linee rette si seghino scambievolmente: il rettangolo contenuto dai segmenti di una è uguale a quello, che si contiene dai segmenti dell' altra. C.B.D.

PROPOSIZIONE XXXVI.

TEOREMA.

Se fuori di un cerchio si prenda un qualunque punto, e da questo cadano nel cerchio due linee rette, delle quali una seghi il cerchio, l' altra lo tocchi; il rettangolo contenuto da tutta la segante, e dal segmento esteriore, ch' è tra il punto, e la circonferenza convessa sarà uguale al quadrato della tangente.

Fuori del cerchio ABC si prenda un qualunque punto D, dal quale cadano nel detto cerchio le due linee rette DCA, DB; e DCA seghi il cerchio ABC, DB lo tocchi: dico che il rettangolo di AD in DC sia uguale al quadrato di DB. *fig.* 97.

Imperocchè la linea retta DCA o passa per lo centro, o non vi passa. Passi primieramente per lo centro del cerchio ABC, che sia E, e si unisca EB: sarà retto l' angolo EBD *: e perciò la linea retta AC trovandosi divisa per metà in E, ed aggiunta per *n.* 1. * 18. III.

dritto ad essa CD; il rettangolo di AD in DC insieme
* 6. II. col quadrato di EC sarà uguale al quadrato di ED*. Ma CE è uguale ad EB; dunque il rettangolo di AD in DC insieme col quadrato di EB è uguale al quadrato di ED. Or il quadrato di ED è uguale ai quadrati di EB, e di BD, perchè è retto l'angolo EBD; perciò il rettangolo di AD in DC insieme col quadrato di EB è uguale ai quadrati di EB, e di BD: se ne tolga di comune il quadrato di EB, e sarà il rimanente rettangolo di AD in DC uguale al quadrato della tangente DB.

n. 2. Or non passi la segante DCA per lo centro del cerchio ABC: si prenda il centro E; da esso si abbassi sopra AC la perpendicolare EF, e si uniscano le EB, EC, ED: è dunque retto l'angolo EFD. E poichè la linea retta EF, tirata per lo centro, sega la linea retta AC, non tirata per lo centro, ad angoli retti; la dividerà per metà: ed è perciò AF uguale ad FC. Similmente poichè la linea retta AC è divisa in parti uguali in F, e le sta per dritto CD; il rettangolo di AD in DC insieme col quadrato di FC dovrà essere uguale al quadrato di ED: vi si aggiunga di comune il quadrato di FE, e sarà il rettangolo di AD in DC insieme co' quadrati di CF, e di FE uguale ai quadrati di DF, e di FE. Ma ai quadrati di DF, e di FE è uguale il quadrato di DE, perchè è retto l'angolo EFD; ed ai quadrati di CF, e di FE è uguale il quadrato di CE: perciò il rettangolo di AD in DC insieme col quadrato di CE è uguale al quadrato di ED. Ma sono anche i quadrati di EB, e di BD uguali al qua-
* 47. I. drato di ED, per esser retto l'angolo EBD*; dun-

que il rettangolo di AD in DC insieme col quadrato di EB è uguale ai quadrati di EB, e di BD. Or se ne tolga di comune il quadrato di EB; sarà il rimanente rettangolo di AD in DC uguale al quadrato di BD.

E quindi se fuori di un cerchio si prenda un qualunque punto, e ciò che segue. C.B.D.

PROPOSIZIONE XXXVII.

TEOREMA.

Se da un qualunque punto preso fuori di un cerchio si tirino al cerchio due linee rette, una segante, e l'altra incidente; e sia il rettangolo contenuto da tutta la segante, e dalla parte sua esteriore, ch' è tra'l punto, e la circonferenza convessa, uguale al quadrato dell' incidente: una tal incidente toccherà il cerchio.

Fuori del cerchio ABC si prenda un qualunque punto D, e da esso cadano nel cerchio ABC le due linee rette DCA, DB, e DCA sia una segante del cerchio, DB poi un incidente; e sia il rettangolo di AD in DC uguale al quadrato di DB: dico che questa DB tocchi il cerchio ABC. *fig.* 98.

Imperocchè si tiri DE, che tocchi il cerchio ABC *; poi si prenda il centro di questo cerchio * ABC, che sia F, e si uniscano le FE, FB, FD; sarà retto l'angolo FED *. E poichè DE tocca il * cerchio ABC, e DCA lo sega, sarà il rettangolo di AD in DC uguale al quadrato di DE *. Ma il ret- *

* 17. III.
* 16. III.
* 36. III.

tangolo di AD in DC si suppone uguale al quadrato di DB; dunque il quadrato di DE sarà uguale al quadrato di DB; e perciò la linea retta DE sarà uguale all' altra DB. È poi anche FE uguale ad FB: perciò le due DE, EF sono uguali alle due DB,BF, ciascuna a ciascuna; la base FD è comune: dunque l'angolo DEF è uguale all'angolo DBF. Ma l'angolo DEF è retto; quindi anche l' altro DBF sarà retto. È poi FB prodotta un diametro, e la perpendicolare che si tira al diametro di un cer-
* 16. III. chio, da un suo estremo, tocca il cerchio *; dunque DB tocca il cerchio ABC.

E perciò se fuori di un cerchio si prenda un qualunque punto, e le cose che seguono. C.B.D.

FINE DEL TERZO LIBRO.

IL QUARTO LIBRO

DEGLI

ELEMENTI DI EUCLIDE.

DEFINIZIONI.

I. Una figura rettilinea si dice *iscriversi* in un' altra figura rettilinea, quando ciascun angolo della figura iscritta tocca ciascun lato di quella nella quale s'iscrive.

II. Similmente si dice una figura rettilinea *circoscriversi* ad un' altra, allorchè ciascun lato della circoscritta tocca ciascun angolo di quella intorno alla quale si circoscrive.

III. Una figura rettilinea si dirà *iscriversi* in un cerchio, quando ciascun angolo di quella figura rettilinea tocca la circonferenza del cerchio.

IV. Una figura rettilinea si dirà poi *circoscriversi* ad un cerchio, quando ciascun lato di quella figura rettilinea tocca la circonferenza del cerchio.

V. Similmente un cerchio si dirà *iscriversi* in una figura rettilinea, quando la circonferenza del cerchio tocca ciascun lato di quella figura rettilinea nella quale s' iscrive.

VI. Un cerchio si dirà *circoscriversi* ad una figura rettilinea, allorchè la circonferenza del cerchio

tocca ciascun angolo della detta figura rettilinea.

VII. Una retta si dirà *adattarsi* in un cerchio, quando i suoi termini sieno nella circonferenza del cerchio.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

In un dato cerchio adattare una linea retta uguale ad un' altra linea retta data, che non sia maggiore del diametro del cerchio.

fig. 99. Sia dato il cerchio ABC, e data pure la linea retta D, non maggiore del diametro del cerchio: fa d' uopo adattare nel cerchio ABC una linea retta uguale all' altra D.

Si tiri il diametro BC del cerchio ABC. Che se BC sia uguale a D, si sarà fatto ciò, che s' era proposto; poichè nel cerchio ABC si è adattata la linea retta BC uguale all'altra D. Se poi non l'è;

* 15. III. BC dovrà essere maggiore di D*: si ponga perciò CE uguale a D; poi col centro C, intervallo CE si descriva il cerchio AEF, e si unisca CA. E poichè il punto C è il centro del cerchio AEF, sarà CA uguale a CE. Ma D è pure uguale a CE; dunque sarà D uguale ad AC.

E perciò nel dato cerchio ABC si è adattata la linea retta AC uguale alla data D, che non è maggiore del diametro del cerchio. C.B.F.

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA.

In un dato cerchio iscrivere un triangolo equiangolo ad un triangolo dato.

Sia dato il cerchio ABC, e dato il triangolo DEF: fa d'uopo iscrivere nel cerchio ABC un triangolo equiangolo al triangolo DEF. *fig. 100.*

Si tiri la linea retta GAH, che tocchi il cerchio ABC nel punto A: poi alla linea retta AH, ed al punto A in essa, si costituisca l'angolo HAC uguale all'angolo DEF *; e similmente alla linea retta GA, ed al punto A in essa si costituisca l'angolo GAB uguale all'angolo DFE, e si unisca BC. * 23. I.

E poichè la linea retta HAG tocca il cerchio ABC, e dal contatto si è tirata AC, sarà l'angolo HAC uguale a quello, ch'è costituito nel segmento alterno del cerchio *, cioè ad ABC. Ma * l'angolo HAC è uguale all'angolo DEF: dunque anche l'angolo ABC è uguale all'angolo DEF. Per la stessa ragione è pure l'angolo ACB uguale all'angolo DFE; quindi il rimanente angolo BAC sarà uguale al rimanente EDF *. E perciò il triangolo * ABC è equiangolo al triangolo DEF: ed è iscritto nel cerchio ABC. * 32. III. * 32. I.

Dunque nel dato cerchio si è iscritto un triangolo equiangolo ad un triangolo dato. C.B.F.

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA.

Circoscrivere ad un cerchio dato un triangolo equiangolo ad un triangolo dato.

fig. 101. Sia dato il cerchio ABC, e dato il triangolo DEF: fa d' uopo circoscrivere al cerchio ABC un triangolo equiangolo al triangolo DEF.

Si prolunghi EF dall' una parte, e dall'altra nei punti G, ed H; poi preso il centro K del cerchio ABC, si tiri comunque la linea retta KB, e si costituisca a questa linea retta, ed al punto K in essa l'angolo BKA uguale all' angolo DEG, e l' altro BKC uguale all' angolo DFH; indi per gli punti A, B, e C si tirino le linee rette LAM, MBN, NCL,
* 17. III. che tocchino il cerchio ABC*.

E poichè le LM, MN, NL toccano il cerchio ABC nei punti A, B, C, e dal centro K si sono tirate a questi punti A, B, C le linee rette KA,
* 18. III. KB, KC; saranno retti gli angoli in A, B, C *. Or gli angoli del quadrilatero AMBK sono uguali a quattro retti, poichè esso si divide in due triangoli, i quali hanno retti gli angoli KAM, KBM; perciò saranno i rimanenti angoli AKB,AMB uguali a due retti. Sono poi anche gli angoli DEG,DEF uguali a due retti; perciò gli angoli AKB, AMB sono uguali agli angoli DEG,DEF. Ma l'angolo AKB è uguale all'altro DEG; quindi sarà il rimanente angolo AMB uguale al rimanente DEF. Dimostreremo si-

milmente che l'angolo LNM è uguale all' altro DFE; e perciò il rimanente MLN è uguale al rimanente EDF * . Laonde il triangolo LMN è equiangolo al * triangolo DEF: è poi circoscritto al cerchio ABC. 32. I

Dunque ad un dato cerchio si è circoscritto un triangolo equiangolo ad un triangolo dato. C.B.F.

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA.

In un dato triangolo iscrivere il cerchio.

Sia dato il triangolo ABC: fa d' uopo iscrivervi il cerchio. *fig.* 102.

Si dividano per metà i due suoi angoli ABC, BCA colle linee rette BD, CD *, le quali convengano * tra loro nel punto D; e da questo punto D si tirino le perpendicolari DE, DF, DG alle linee rette AB, BC, CA *. E poichè l' angolo ABD è uguale * all'angolo CBD, ed è pure l'angolo retto BED uguale al retto BFD; i due triangoli EBD, DBF, che hanno due angoli uguali a due angoli, ed un lato uguale ad un lato, cioè BD, ch' è comune ad entrambi, il qual sottende uno degli angoli uguali; avranno anche i rimanenti lati uguali ai rimanenti lati *; e sarà DE uguale a DF. Per la stessa ragione * sarà pure DG uguale a DF; quindi anche DE è uguale a DG: e perciò le tre linee rette DE, DF, DG sono tra loro uguali. Per la qual cosa il cerchio descritto col centro D, intervallo uguale ad una delle DE, DF, DG passerà anche per gli rimanenti

(margin: 9. I; 12. I; 26. I)

punti, e toccherà le linee rette AB, BC, CA, perchè sono retti gli angoli in E, F, G: e quella linea retta, che si tira perpendicolare al diametro di un cerchio, da un suo estremo, tocca il cer-
* 16. III chio *. Dunque ciascuna delle AB, BC, CA tocca il cerchio; e questo sarà perciò iscritto nel triangolo ABC.

Quindi nel dato triangolo ABC si è iscritto il cerchio EFG. C.B.F.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Ad un dato triangolo circoscrivere il cerchio.

fig. 103. Sia dato il triangolo ABC: fa d' uopo circoscrivergli il cerchio.

Si dividano per metà le AB, AC nei punti D, E; e da questi punti D, E si tirino alle AB, AC le perpendicolari DF, EF, le quali prolungate dovranno necessariamente incontrarsi; poichè congiunta DE, gli angoli EDF, DEF risultano minori di due retti: e quando in due linee rette vi cade un' altra linea retta, e fa gli angoli interni dalla parte stessa minori di due retti; quelle due linee rette prolungate
* po. 5. debbono incontrarsi *. Dunque le DF, EF prolungate s' incontreranno in F; si uniscano le BF, FC, FA. E poichè AD è uguale a DB, e DF è comune, e forma con ciascuna di quelle un angolo retti; sarà la base* AF uguale alla base FB. Similmente si dimostrerà CF uguale ad FA; dunque an-

che BF è uguale FC : e perciò le tre linee rette FA , FB , FC sono uguali tra loro. Per la qual cosa il cerchio descritto col centro F, intervallo uguale ad una delle FA, FB, FC, passerà anche per gli rimanenti punti; e sarà il cerchio circoscritto al triangolo ABC.

Dunque ad un dato triangolo si è circoscritto il cerchio. C.B.F.

Cor. È manifesto, che quando il centro del cerchio cade dentro del triangolo, ciascun angolo di questo, esistendo in un segmento maggiore del semicerchio, sia minore del retto *. Che se poi il centro cada in uno de' lati, l' angolo, ch' è sotteso da questo lato, esistendo nel semicerchio, sarà retto; e cadendo il centro fuori del triangolo, dalla parte di uno dei lati, l' angolo, ch' è sotteso da questo lato, esistendo in un segmento minore del semicerchio, sarà maggiore del retto. E perciò se il triangolo dato sia acutangolo, il centro cadrà dentro del triangolo; se sia rettangolo, cadrà il centro in quel lato, che sottende l' angolo retto; e se sia ottusangolo, il centro cadrà fuori del triangolo dalla parte del lato opposto all' angolo ottuso.

* 31. III

PROPOSIZIONE VI.

PROBLEMA.

In un dato cerchio iscrivere un quadrato.

fig. 104. Sia dato il cerchio ABCD: fa d' uopo iscrivervi un quadrato.

Si tirino i diametri AC, BD del cerchio ABCD ad angoli retti tra loro, e si uniscano le AB, BC, CD, DA.

E poichè BE è uguale a DE, perchè E è il centro, ed EA è comune, e fa angoli retti; sarà
* 4. I la base BA uguale alla base AD *. Per la stessa ragione tanto BC, che CD è uguale a BA, o AD; dunque il quadrilatero ABCD è equilatero. Dico che sia anche rettangolo. Imperocchè essendo la linea retta BD diametro del cerchio ABCD, sarà BAD
* 31. III. un semicerchio; e perciò l' angolo BAD retto *: e per la stessa ragione è retto ciascuno degli altri angoli ABC, BCD, CDA; ond' è che il quadrilatero ABCD è rettangolo. Ma si è dimostrato esser anche equilatero; sarà dunque un quadrato: ed è iscritto, secondo che si domandava nel cerchio ABCD.

Quindi nel dato cerchio ABCD si è iscritto il quadrato ABCD. C.B.F.

PROPOSIZIONE. VII.

PROBLEMA.

Ad un dato cerchio circoscrivere un quadrato.

Sia dato il cerchio ABCD: fa d' uopo circoscrivergli un quadrato. *fig.* 105.

Si tirino i due diametri AC, BD del cerchio ABCD, l' uno perpendicolare all' altro, e poi per gli punti A, B, C, D si tirino le linee rette FG, GH, HK, KF tangenti al cerchio ABCD. * * 16. III.

E poichè FG tocca il cerchio ABCD, e dal centro al contatto A si e tirata EA; saranno retti gli angoli in A *: e per la stessa ragione sono * 17. III. retti gli angoli nei punti B, C, D. Or essendo retto l' angolo AEB, ed anche retto l' altro EBG; sarà GH parallela ad AC *; e per la stessa ragione * 29. I anche AC è parallela ad FK. Dimostreremo similmente, che tanto GF, che HK sia parallela a BED; perciò i quadrilateri GK, GC, AK, FB, BK, sono parallelogrammi; e quindi GF è uguale ad HK, e GH ad FK *. Or poichè AC è uguale a BD * 34. I. ed AC è uguale sì a GH, che ad FK; e parimente BD è uguale sì a GF, che ad HK; sarà sì GH, che FK uguale a GF, o ad HK: e perciò il quadrilatero FGHK è equilatero. Dico che sia anche rettangolo Poichè essendo GBEA un parallelogrammo, che ha l'angolo AEB retto; sarà anche retto l'altro AGB *. * 34. I. Similmente dimostreremo, che sieno retti gli angoli nei punti H, K, F; quindi il quadrilatero FGHK

è rettangolo. Ma si è dimostrato equilatero; è dunque un quadrato: ed è circoscritto al cerchio ABCD.

Perciò ad un dato cerchio si è circoscritto un quadrato. C.B.F.

PROPOSIZIONE. VIII.

TEOREMA.

In un dato quadrato iscrivere il cerchio.

Sia dato il quadrato ABCD: fa d'uopo iscrivervi il cerchio.

fig. 106. Si divida per metà ciascuna delle AB, AD nei punti F, E: e per E si tiri ad AB, o CD la parallela EH; per F poi si tiri FK parallela ad AD, o BC. È dunque parallelogrammo ciascuno dei quadrilateri AK, KB, AH, HD, AG, GC, BG, GD; e perciò sono uguali i loro lati opposti * . E poichè DA è uguale ad AB, ed AE è metà di AD, AF metà di AB; sarà AE uguale ad AF: perciò sono anche uguali i lati opposti; dunque FG è uguale a GE. Dimostreremo similmente, che sì GH, che GK sia uguale ad FG, o GE; quindi le quattro linee rette GE, GF, GH, GK sono uguali tra loro: e perciò il cerchio descritto col centro G, intervallo uguale ad una delle GE, GF, GH, GK passerà anche per gli rimanenti punti, e toccherà le linee rette AB, BC, CD, DA; perchè sono retti gli angoli in E, F, H, K: ed ogni linea retta, che si tira perpendicolare al diametro di un cerchio da

* 34. I.

un suo estremo, tocca il cerchio*. Quindi ciascuna delle AB, BC, CD, DA tocca il cerchio; e perciò un tal cerchio sarà iscritto nel quadrato ABCD. *16. III

Si è dunque in un dato quadrato i.critto il cerchio. C.B.F.

PROPOSIZIONE. IX.

PROBLEMA.

Ad un quadrato dato circoscrivere il cerchio.

Sia dato il quadrato ABCD: fa d'uopo circoscrivergli il cerchio. *fig.* 107.

Si uniscano le AC, BD, le quali s' interseghino in E. E poichè DA è uguale ad AB, ed AC è comune; le due DA, AC sono uguali alle due BA, AC; anche la base DC è uguale alla base CB: quindi sarà l' angolo DAC uguale all' angolo BAC; e perciò l' angolo DAB è diviso per metà dalla linea retta AC. Similmente dimostreremo, che ciascuno degli angoli ABC, BCD, CDA sia diviso per metà dalle linee rette AC, DB. Or poichè l' angolo DAB è uguale all' angolo ABC; ed è l'angolo EAB metà di DAB, come pure l'altro angolo EBA è metà di ABC; sarà perciò anche l' angolo EAB uguale all' angolo EBA: quindi il lato EA sarà uguale al lato EB. Similmente dimostreremo, che ciascuna delle linee rette EC, ED sia uguale a ciascuna delle EA, EB: perciò le quattro linee rette EA, EB, EC, ED sono uguali tra loro. Per la qual cosa il cerchio descritto col centro E, intervallo una delle EA, EB, EC, ED dovrà anche passare per gli rimanenti punti; e sarà circoscritto al quadrato ABCD.

Quindi al dato quadrato si è circoscritto il cerchio. C.B.F.

PROPOSIZIONE. X.

TEOREMA.

Costituire un triangolo isoscele, che abbia ciascuno degli angoli alla base doppio del rimanente.

fig. 108. Si esponga una qualche linea retta AB, la quale si divida nel punto C in modo, che il rettangolo contenuto da AB, e BC sia uguale al quadrato
* 11. II. to di CA *: poi col centro A intervallo AB si descriva il circolo BDE, e si adatti in esso la linea retta BD uguale ad AC, che non è maggiore del di-
* I. IV. ametro del cerchio BDE *; indi congiunta le AD,
* 5. IV. DC, si circoscriva al triangolo ADC il cerchio ACD *.

E poichè il rettangolo di AB in BC è uguale al quadrato di AC, ed è AC uguale a BD; sarà il rettangolo di AB in BC uguale al quadrato di BD. Per lo che essendosi preso fuori del cerchio ACD il punto B, dal quale cadono in un tal cerchio le due linee rette BCA, BD, la prima delle quali sega il cerchio, l'altra è un'incidente in esso, e tali che il rettangolo di AB in BC è uguale al quadrato di
* 37. III. BD; la linea retta BD dovrà toccare il cerchio *. Or poichè BD tocca il cerchio ACD, e dal contatto D si è tirata DC, sarà l'angolo BDC uguale a quello, che si costituisce nel segmento alterno
* 32. III. del cerchio, cioè all'angolo DAC *. E perciò essendo l'angolo BDC uguale all'altro DAC: aggiun-

tovi di comune l' angolo CDA; sarà tutto l' angolo BDA uguale ai due altri CDA, DAC. Ma agli angoli CDA, DAC è anche uguale l'esteriore BCD *; dunque l'angolo BDA è uguale all'altro BCD. E' poi l' angolo BDA uguale all' angolo CBD; poichè il lato AD è uguale al lato AB: quindi sarà anche DBA uguale a BCD; e perciò sono tra loro uguali i tre angoli BDA, DBA, BCD. Or poichè l' angolo DBC è uguale all' altro BCD; il lato BD è uguale al lato DC. Ma BD si è posto uguale a CA; dunqne anche AC è uguale a CD: e perciò l' angolo CDA è uguale all' angolo DAC. Laonde gli angoli CDA, DAC sono il doppio dell'angolo DAC: ed è poi l'angolo BCD uguale agli angoli CDA, DAC; dunque anche BCD è doppio di DAC. Ma l' angolo BCD è uguale a ciascuno degli altri BDA, DBA; perciò ciascun di questi BDA, DBA è doppio di DAB.

* 32. I.

Si è dunque costituito il triangolo isoscele ADB, che ha ciascuno degli angoli alla base doppio del rimanente. C.B.F.

PROPOSIZIONE. XI.

TEOREMA.

In un dato cerchio iscrivere un pentagono equilatero ed equiangolo.

Sia dato il cerchio ABCDE: fa d'uopo iscrivervi un pentagono, equilatero, ed equiangolo. *fig.* 109

Si esponga il triangolo isoscele FGH, il quale abbia

ciascuno degli angoli in G, ed H doppio dell' angolo
* 10. IV. in F * : poi s' iscriva nel cerchio ABCDE il triangolo
* 2. IV. ACD equiangolo al triangolo FGH * in modo, che all' angolo in F sia uguale l' angolo CAD, ed a ciascuno di quelli, che sono in G, ed H sia uguale ciascuno degli altri ACD, CDA: quindi l' uno, e l'altro degli angoli ACD, CDA è doppio dell'angolo CAD Si divida per metà ciascuno di questi angoli ACD, CDA colle linee rette CE, DB; e si uniscano le AB, BC, DE, EA.

E poichè ciascuno degli angoli ACD, CDA è doppio dello stesso angolo CAD, e si sono quelli divisi per metà colle linee rette CE, DB; perciò i cinque angoli DAC, ACE, ECD, CDB, BDA saranno tra loro uguali. Or angoli uguali insistono sopra archi
* 26. III. uguali * ; perciò i cinque archi AB, BC, CD, DE, EA sono uguali tra loro. Ma archi uguali sono sottesi
* 29. III. da linee rette uguali *; quindi sono anche uguali tra loro le cinque linee rette AB, BC, CD, DE EA; e perciò il pentagono ABCDE è equilatero.

Dico che sia anche equiangolo. Imperocchè essendo l'arco AB uguale all' arco DE; aggiuntovi di comune l' arco BCD, sarà tutto l' arco ABCD uguale a tutto l'arco EDCB. Ma sull' arco ABCD v' insiste l' angolo AED, e sull' altro EDCB v' insiste l'angolo BAE; dunque l'angolo AED è uguale all'altro
* 27. III. BAE * Per la stessa ragione ciascuno degli angoli ABC, BCD CDE è uguale all' angolo BAE, o all' altro AED: quindi il pentagono ABCDE è equiangolo; si è anche dimostrato equilatero.

E perciò in un cerchio dato si è iscritto un pentagono equilatero, ed equiangolo. C.B.F.

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA.

Ad un dato cerchio circoscrivere un pentagono equilatero, ed equiangolo.

Sia dato il cerchio ABCDE: fa d'uopo circoscrivergli un pentagono equilatero, ed equiangolo. *fig.* 110.

Si concepiscano essere A, B, C, D, E i vertici degli angoli del pentagono iscritto in un tal cerchio * in modo, che gli archi AB, BC, CD, DE, EA * sieno uguali; e per gli punti A, B, C, D, E * si tirino al cerchio le tangenti GH, HK, KL, LM, MG *: indi preso il centro F del cerchio ABCDE, * si uniscano le FB, FK, FC, FL, FD. 11. IV. 17. III.

E poichè la linea retta KL tocca il cerchio ABCDE nel punto C, e dal centro F al contatto C si è tirata FC; sarà FC perpendicolare a KL *; * perciò è retto ciascuno degli angoli in C; e per la stessa ragione sono anche retti gli angoli in B, ed in D. Or essendo retto l'angolo FCK, il quadrato di FK è uguale ai quadrati di FC, e di CK: e similmente il quadrato di FK è uguale ai quadrati di FB, e di BK; dunque i quadrati di FC, e di CK sono uguali ai quadrati di FB, e di BK. Ma di questi quadrati, quello di FC è uguale all'altro di FB; quindi il rimanente quadrato di CK sarà uguale al rimanente quadrato di BK; e perciò BK è uguale a CK. Ed essendo FB uguale ad FC, ed FK comune; le due BF, FK sono uguali alle due 18. III.

CF, FK; è pure la base BK uguale alla base KC; sarà dunque l' angolo BFK uguale all' angolo
* 8. I. KFC *, e l' angolo BKF all'angolo FKC: quindi l' angolo BFC è doppio dell' angolo KFC, e l' angolo BKC è doppio dell' altro FKC. Per la stessa ragione anche l' angolo CFD è doppio dell' angolo CFL, e l' angolo CLD è doppio dell' altro CLF. Or essendo l' arco BC uguale all' arco CD; l'ango-
* 27. III. lo BFC sarà uguale all' angolo CFD *. Ma l' angolo BFC è doppio dell'angolo KFC, come pure l'angolo DFC è doppio di LFC; quindi l'angolo KFC è uguale all' angolo CFL. Per la qual cosa i due triangoli FKC, FLC avendo due angoli uguali a due angoli, ciascuno a ciascuno, ed un lato uguale ad un lato, cioè FC, che ad essi è comune, avranno i rimanenti lati uguali ai rimanenti lati,
* 26. I. ed il rimanente angolo uguale al rimanente angolo*: è dunque la linea retta KC uguale all' altra CL, e l'angolo FKC uguale all'angolo FLC. E poichè KC è uguale a CL; sarà KL doppia di KC: e per la stessa ragione anche HK è doppia di BK. Adunque essendosi dimostrata BK uguale a KC; ed essendo poi KL doppia di KC, come pure HK doppia di BK; sarà HK uguale a KL: e della stessa maniera ciascuna delle GH, GM, ML si dimostrerà uguale ad HK, o KL. Quindi il pentagono GHKLM è equilatero.

Dico che sia anche equiangolo. Poichè essendo l'angolo FKC uguale all' angolo FLC; ed essendosi dimostrato l' angolo HKL doppio di FKC, e l'angolo KLM doppio di FLC; sarà l' angolo HKL uguale all' angolo KLM. In simil modo si dimo-

strerà ciascuno degli angoli KHG , HGM , GML uguale ad HKL , o a KLM ; dunque i cinque angoli GHK , HKL , KLM , LMG , MGH sono uguali tra loro ; e perciò il pentagono GHKLM è equiangolo : si è dimostrato essere equilatero ; ed è pure circoscritto al cerchio ABCDE. C.B.F.

PROPOSIZIONE XIII.

PROBLEMA.

In un dato pentagono equilatero, ed equiangolo iscrivere il cerchio.

Sia dato il pentagono equilatero, ed equiangolo ABCDE : fa d'uopo iscrivervi il cerchio. *fig.* 111.

Si divida ciascuno degli angoli BCD , CDE per metà colle linee rette CF , DF ; e dal punto F nel quale tra loro convengono le CF , DF , si tirino le linee rette FB , FA , FE.

E poichè BC è uguale a CD , e CF è comune ; le due BC , CF sono uguali alle due DC , CF ; è anche l'angolo BCF uguale all'angolo DCF : dunque la base BF è uguale alla base FD , il triangolo BFC è uguale al triangolo DCF , ed i rimanenti angoli sono uguali ai rimanenti angoli , ciascuno a ciascuno , quelli cioè , che sono sottesi dai lati uguali * : quindi l'angolo CBF è uguale all'angolo CDF . E poichè l'angolo CDE è doppio dell'angolo CDF , e l'angolo CDE è uguale all'angolo ABC, l'angolo CDF all'altro CBF ; sarà anche l'angolo CBA doppio dell'angolo CBF : e perciò l'angolo

* 4. I.

ABF è uguale all' angolo FBC . Laonde l' angolo ABC è anch' esso diviso per metà dalla linea retta BF. E si dimostrerà similmente, che ciascuno degli angoli BAE, AED sia diviso per metà dalle linee rette AF, FE.

Ciò premesso, si conducano dal punto F alle linee rette AB, BC, CD, DE, EA le perpendicolari FG, FH, FK, FL, FM. E poichè l'angolo HCF è uguale all' altro KCF; ed è pure il retto FHC uguale al retto FKC: perciò i due triangoli FHC, FKC avranno due angoli uguali a due angoli, ciascuno a ciascuno, ed un lato uguale ad un lato, il comune ad entrambi FC, il qual sottende uno degli angoli uguali; avranno dunque anche i rimanenti
* 26. I. lati uguali ai rimanenti lati *, e sarà la perpendicolare FH uguale alla perpendicolare FK. Si dimostrerà similmente ciascuna delle FL, FM, FG uguale ad FH, o FK: quindi le cinque linee rette FG, FH, FK, FL, FM sono uguali tra loro; e perciò, descritto il cerchio col centro F, intervallo una delle FG, FH, FK, FL, FM, questo passerà anche per gli rimanenti punti, e toccherà le linee rette AB, BC, CD, DE, EA, perchè sono retti gli angoli in G, H, K, L, M; e quella linea retta, che si tira perpendicolare al diametro di un cerchio, da
* 16. III. un suo estremo, tocca il cerchio *. Dunque ciascuna delle AB, BC, CD, DE, EA tocca il cerchio; e perciò questo sarà iscritto nel pentagono ABCDE.

Quindi nel dato pentagono equilatero, ed equiangolo si è iscritto il cerchio. C.B.F.

PROPOSIZIONE XIV.

PROBLEMA.

Ad un dato pentagono equilatero, ed equiangolo circoscrivere il cerchio.

Sia dato il pentagono equilatero, ed equiangolo ABCDE: fa d'uopo circoscrivere ad esso il cerchio. *fig.* 112.

Ciascuno degli angoli BCD, CDE si divida per metà colle linee rette CF, FD; e dal punto F nel quale convengono tali linee rette si tirino ai punti B, A, E le FB, FA, FE.

Si dimostrerà come nella precedente, che ciascuno degli angoli CBA, BAE, AED sia diviso per metà dalle linee rette BF, FA, FE. E perciò essendo l' angolo BCD uguale all'altro CDE; e dell' angolo BCD essendone metà l' angolo FCD, come pure dell' angolo CDE essendone metà l'altro CDF, sarà l'angolo FCD uguale all'angolo FDC: e quindi anche il lato CF è uguale al lato FD. Si dimostrerà similmente, che ciascuna delle FB, FA, FE sia uguale ad FC, o FD: e perciò le cinque linee rette FA, FB, FC, FD, FE sono uguali tra loro. Ond'è che il cerchio descritto col centro F intervallo una di esse FA, FB, FC, FD, FE passerà anche per gli rimanenti punti; e sarà circoscritto al pentagono ABCDE, ch' è equilatero, ed equiangolo.

Dunque ad un dato pentagono equilatero, ed equiangolo si è circoscritto il cerchio. C.B.D.

PROPOSIZIONE XV.

PROBLEMA.

Iscrivere in un cerchio un esagono equilatero, ed equiangolo.

fig. 113. Sia dato il cerchio ABCDEF: fa d'uopo iscrivervi un esagono equilatero, ed equiangolo.

Si prenda il centro G del cerchio ABCDEF, e si tiri un diametro AD; poi col centro D, intervallo DG si descriva il circolo EGCH, e congiunte le EG, CG, si prolunghino nei punti B, ed F, e si uniscano le AB, BC, CD, DE, EF, FA: dico che l'esagono ABCDEF sia equilatero, ed equiangolo.

Poichè il punto G è il centro del cerchio ABCDEF; sarà GE uguale a GD. E similmente poichè D è il centro del cerchio EGCH; sarà DE uguale a DG. Ma GE si è dimostrata uguale a GD; sarà dunque GE uguale anche ad ED: quindi il triangolo EGD è equilatero; e perciò i tre suoi angoli EGD, GDE, DEG sono uguali tra loro, poichè gli angoli alla base di ogni triangolo isoscele sono tra loro ugua-
* 5. I. li *. Ma i tre angoli di ogni triangolo sono uguali
* 32. I. a due retti *; dunque l'angolo EGD è la terza parte di due retti: e similmente si dimostrerà, che sia terza parte di due retti l'angolo DGC. Or poichè la linea retta CG insistendo sull'altra EB, forma gli adjacenti angoli EGC, CGB uguali a due retti; sarà anche il rimanente angolo CGB la terza parte di due retti: quindi gli angoli EGD, DGC,

CGB sono uguali tra loro. Ma gli altri angoli BGA, AGF, FGE sono uguali rispettivamente ai loro angoli verticali EGD, DGC, CGB *; perciò * 15. I.
i sei angoli EGD, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE sono uguali tra loro. Or angoli uguali insistono sopra archi uguali *; quindi i sei archi AB, BC, CD, * 26. III.
DE, EF, FA sono anche tra di loro uguali. E perchè archi uguali sono sottesi da linee rette uguali *; perciò anche le sei linee rette sono uguali tra * 29. III.
loro: laonde l'esagono ABCDEF è equilatero.

Dico inoltre, che sia equiangolo. Imperocchè l'arco AF è uguale all'arco ED; e perciò se vi si aggiunga di comune l'arco ABCD, sarà tutto l'arco FABCD uguale a tutto l'altro EDCBA. Or sull'arco FABCD v'insiste l'angolo FED, e sull'altro arco EDCBA v'insiste l'angolo AFE: dunque l'angolo FED è uguale all'angolo AFE *. Similmente si * 27. III.
dimostrerà ciascuno dei rimanenti angoli dell'esagono ABCDEF uguale all'angolo AFE, o all'altro FED; perciò l'esagono ABCDEF è equiangolo: ma si è dimostrato anche equilatero, ed è iscritto nel cerchio ABCDEF.

Quindi si è iscritto in un cerchio dato un esagono equilatero, ed equiangolo. C.B.F.

Cor. È chiaro da ciò, che il lato dell'esagono sia uguale al raggio del cerchio in cui è iscritto.

E se per gli punti A, B, C, D, E, F si tirino le tangenti al cerchio, si circoscriverà ad esso l'esagono equilatero, ed equiangolo; il che potrà dimostrarsi, come si è fatto per lo pentagono. Ed inoltre s'iscriverà similmente in un dato esagono equilatero, ed equiangolo il cerchio, o gli si circoscriverà.

PROPOSIZIONE XVI.

PROBLEMA.

Iscrivere in un cerchio dato un quindegagono equilatero, ed equiangolo.

fig. 114. Sia dato il cerchio ABCD: fa d'uopo iscrivere in esso un quindegagono equilatero, ed equiangolo.

Sia AC il lato del triangolo equilatero iscritto
* 2. IV. nel cerchio ABCD *, ed AB il lato del pentagono
* 11. IV. equilatero, ed equiangolo*. È chiaro che delle quindici parti nelle quali si vuol dividere l'intera circonferenza ABCD, ne dovrà contenere cinque l'arco ABC, ch'è la terza parte della circonferenza, e tre l'altro arco AB, che n'è la quinta parte; e quindi il rimanente arco BC ne conterrà due. Si divida BC per metà in E, sarà sì BE, che EC la quindicesima parte dell'intera circonferenza ABCD: e perciò se si adatteranno nel cerchio successivamente delle linee rette uguali alle congiungenti BE, EC, si sarà iscritto in esso il quindegagono equilatero, ed equiangolo. C.B.F.

Seguendo il metodo stesso tenuto per lo pentagono, se per gli punti delle divisioni della circonferenza si tirino le tangenti al cerchio, gli si circoscriverà il quindegagono equilatero, ed equiangolo. E di più si potrà nel modo stesso in un dato quindegagono equilatero, ed equiangolo iscrivere il cerchio, o circoscrivercelo.

FINE DEL QUARTO LIBRO.

IL QUINTO LIBRO

DEGLI

ELEMENTI DI EUCLIDE

DEFINIZIONI

I. Una grandezza minore si dice *parte* di un'altra grandezza maggiore, quando la minore misura la maggiore.

II. La maggiore si dice poi *multiplice* della minore, quando questa misura la maggiore.

III. La *ragione* è un certo rapporto scambievole di due grandezze dello stesso genere, secondo la quantità.

IV. Diconsi grandezze *dello stesso genere* quelle, delle quali la minore multiplicata, cioè presa più volte, può superare la maggiore.

V. Si dicono essere nella stessa ragione le grandezze, la prima alla seconda, e la terza alla quarta; quando gli ugualmente multiplici della prima, e della terza, presi secondo qualunque multiplicità, si accordino sempre nel superare, mancare, o pareggiare gli ugualmente multiplici della seconda, e della quarta, presi anche secondo qualunque multiplicità.

VI. Le grandezze, che hanno la stessa ragione, si dicono proporzionali.

VII. Quando poi di quelli ugualmente multiplici (*def. V.*), il multiplice della prima superasse quello della seconda; ma l'ugualmente multiplice della terza non superasse quello della quarta: allora si dice serbar la prima alla seconda maggior ragione, che la terza alla quarta.

VIII. La *proporzione* è la similitudine, *cioè l'uguaglianza*, delle ragioni.

IX. La proporzione consiste al meno in tre termini.

X. Quando tre grandezze sono proporzionali, la prima dicesi avere alla terza ragion *duplicata* di quella, che ha la prima alla seconda.

XI. Quando poi sono continuamente proporzionali quattro grandezze, la prima si dice avere alla quarta *triplicata* ragione di quella, che ha la prima alla seconda: e così se il numero delle grandezze proporzionali sia $n+1$, la ragione della prima all'ultima si dirà *n-plicata* di quella, che ha la prima alla seconda.

Def. A. Se vi sieno quante grandezze si vogliano del genere stesso, la prima si dice avere all'ultima *ragione composta* dalla ragione, che ha la prima alla seconda, e da quella della seconda alla terza, e dall'altra, che la terza ha alla quarta, e così successivamente fino all'ultima.

Per esempio, sieno le grandezze A, B, C, D, la prima A si dice avere all'ultima D *ragion composta* dalla ragione di essa A a B, dalla ragione di B a C, e dalla ragione di C e D; o pure la ragione

di A a D si dice composta dalle ragioni di A a B, di B a C, e di C a D.

Quindi se la ragione di A a B, sia la stessa, che quella di E ad F; la ragione di B a C sia la stessa, che l'altra di G ad H, e la ragione di C a D la stessa, che quella di K ad L; si dice A avere a B ragione composta dalle ragioni, che sono le stesse, che quelle di E ad F, di G ad H, e di K ad L. E lo stesso s'intende, quando per brevità si dice, che A ha ad E ragion composta dalle ragioni di E ad F, di G ad H, e di K ad L.

Similmente, se la ragione di M ad L sia la stessa, che quella di A a D, poste le medesime cose dette poc'anzi, per brevità si dice, che la ragione di M ad L sia la stessa, che la ragione composta dalle ragioni di E ad F, di G ad H, e di K ad L.

XII. Si dicono grandezze *omologhe* in una proporzione, gli antecedenti tra loro, ed i conseguenti tra loro.

(*) N. B. Colle seguenti voci, si dinotano presso degli antichi Geometri alcune maniere di mutare, o l'ordine, o la grandezza dei termini di una, o di due ragioni.

XIII. La *permuta* di due ragioni, i termini delle quali sieno tutti quattro del genere stesso (*permutando*) è il paragone dell' antecedente all' antecedente, e del conseguente al conseguente.

XIV. *Ragione inversa* (*invertendo*) è il prendere il conseguente come antecedente, e paragonarlo all'antecedente come conseguente.

XV. *Composizione di ragione* (*componendo*) è il paragone dell' antecedente, e del conseguente, insieme presi, allo stesso conseguente.

XVI. *Divisione di ragione* (*dividendo*) è quando si prende l' eccesso dell' antecedente sul conseguente, e si paragona allo stesso conseguente.

XVII. *Conversione di ragione* (*convertendo*) è quando si paragona l' antecedente al suo eccesso sul conseguente.

XVIII. Se vi sieno più grandezze omogenee da una parte, ed altrettante anche omogenee tra loro dall' altra; e le ragioni de' termini prossimi delle prime sieno uguali rispettivamente alle ragioni de' termini prossimi delle seconde: il paragone de' primi termini di esse agli ultimi, si dirà farsi *per equalità*.

XIX. *Proporzione ordinata* è quando vi sieno più grandezze omogenee da una parte, ed altrettante anche omogenee tra di loro dall' altra: e stia la prima alla seconda nelle prime grandezze, come nelle altre la prima alla seconda; come poi nelle prime la seconda alla terza, così nelle altre la seconda alla terza, e così successivamente.

XX. *Proporzione perturbata* è quando vi sieno più grandezze omogenee da una parte, ed altrettante anche tra loro omogenee dall'altra, e sia la prima alla seconda nelle prime grandezze, come la penultima all' ultima nelle seconde; come poi nelle prime la seconda alla terza, così nelle seconde l' antipenultima alla penultima; e così successivamente.

PRINCIPJ DEDOTTI DALLE DEFINIZIONI.

I. *Se quattro grandezze sieno nella stessa ragione la prima alla seconda, e la terza alla quarta:*

la prima e la terza si dovranno accordare in superare, mancare, o pareggiare la seconda, e la quarta.

II. *E se la prima stia alla seconda, come la terza alla quarta*, invertendo, *la seconda starà alla prima, come la quarta alla terza*.

Poichè è evidente, che gli ugualmente multiplici della seconda, e della quarta si dovranno accordare in mancare, pareggiare, o superare gli altri ugualmente multiplici qualsivogliano della prima, e della seconda *. * d.5. V.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Se quante grandezze si vogliano sieno ugualmente multiplici di altrettante, ciascuna di ciascuna; quanto una è multiplice di una, tanto tutte saranno multiplici di tutte.

Sieno quante grandezze si vogliano AB, CD ugualmente multiplici di altrettante grandezze E, F, ciascuna di ciascuna: dico che quanto è AB multiplice di E, tanto sieno le AB, CD multiplici delle E, F. *fig.* 115.

Poichè AB è tanto multiplice di E, quanto CD di F, quante grandezze vi sono in AB uguali ad E, altrettante ve ne saranno in CD uguali ad F: si divida AB in parti uguali ad E, e queste sieno AG, e GB; e CD si divida pure in parti uguali ad F, le quali sieno CH, ed HD; sarà il numero delle parti CH, ed HD uguale al numero delle altre AG, e GB. E poichè AG è uguale ad

E, e CH ad F; saranno anche AG, CH uguali ad E, F. Per la stessa ragione, essendo GB uguale ad E, ed HD uguale ad F, saranno anche GB, HD uguali ad E, F: e perciò quante parti ci sono in AB uguali ad E, tante ve ne saranno in AB, CD uguali ad E, F. Quindi quanto è AB multiplice di E, tanto multiplici saranno le AB, CD delle E, F.

Se dunque quante grandezze si vogliano sieno ugualmente multiplici di altrettante, ciascuna di ciascuna; quanto una è multiplice di una, tanto tutte saranno multiplici di tutte. C.B.D.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Se la prima sia tanto multiplice della seconda, quanto la terza della quarta; e sia di più la quinta tanto multiplice della seconda, quanto la sesta della quarta: sarà anche la prima insieme colla quinta tanto multiplice della seconda, quanto la terza insieme colla sesta è multiplice della quarta.

fig. 116. La prima AB sia tanto multiplice della seconda C, quanto la terza DE della quarta F; sia poi anche la quinta BG tanto multiplice della seconda C, quanto la sesta EH della quarta F: dico che la prima insieme colla qninta, cioè AG, sia tanto multiplice della seconda C, quanto è multiplice la terza insieme colla sesta, cioè DH, della quarta F.

Poichè AB è tanto multiplice di C, quanto DE di F; quante grandezze uguali a C vi sono in AB,

altrettante uguali ad F vi saranno in DE: per la stessa ragione, quante ve ne sono in BG uguali a C, tante ve ne saranno in EH uguali ad F. Quindi quante ve ne sono in tutta AG uguali a C, altrettante ve ne saranno in tutta DH uguali ad F: e perciò, quanto AG è multiplice di C, altrettanto DH lo è di F. Laoude la prima insieme colla quinta, cioè AG, sarà tanto multiplice della seconda C, quanto la terza insieme colla sesta, cioè DH è multiplice della quarta F.

Se dunque la prima sia tanto multiplice della seconda, quanto la terza della quarta; e sia di più la quinta tanto multiplice della seconda, quanto la sesta della quarta: sarà anche la prima insieme colla quinta tanto multiplice della seconda, quanto la terza insieme colla sesta è multiplice della quarta. C.B.D.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Se la prima sia tanto multiplice della seconda, quanto la terza della quarta; e prendansi gli ugualmente multiplici della prima, e della terza: questi saranno anche ugualmente multiplici della seconda, e della quarta.

Sia la prima A tanto multiplice della seconda B, quanto la terza C della quarta D; e prendansi di A, e di C gli ugualmente multiplici EF, e GH: dico, che debba anche EF essere tanto multiplice di B, quanto GH di D. *fig.* 117

Poichè EF è tanto multiplice di A, quanto GH di C; quante grandezze vi sono in EF uguali ad A, tante ve ne saranno ancora in GH uguali a C: dividasi perciò EF nelle grandezze EK, KF uguali ad A; e GH si divida anche nelle grandezze GL, LH uguali a C; sarà il numero delle EK, KF uguale a quello delle GL, LH. E poichè A è tanto multiplice di B, quanto C di D; ed è poi EK uguale ad A, GL uguale a C; sarà EK tanto multiplice di B, quanto GL di D. Per la stessa ragione sarà KF tanto multiplice di B, quanto LH di D: e perciò essendo la prima EK tanto multiplice della seconda B, quanto la terza GL della quarta D; e poi la quinta KF tanto multiplice della seconda B, quanto la sesta LH della quarta D; sarà la prima insieme colla quinta, cioè EF, tanto multiplice della seconda B, quanto la terza insieme colla sesta, cioè GH, è multiplice della quarta D *.

* 2. V.

Se dunque la prima sia tanto multiplice della seconda, quanto la terza della quarta; e prendansi gli ugualmente multiplici della prima, e della terza: questi saranno anche ugualmente multiplici della seconda, e della quarta. C.B.D.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Se la prima abbia alla seconda la stessa ragione, che la terza alla quarta; anche gli ugualmente multiplici della prima, e della terza serberanno la stessa ragione agli ugualmente multiplici della seconda, e della quarta, secondo qualunque multiplicità si prendano, se quelli si paragonino a questi.

La prima A abbia alla seconda B la stessa ragione, che la terza C alla quarta D; e prendansi delle A, e C gli ugualmente multiplici qualunque E, ed F; e di B, e di D gli altri ugualmente multiplici qualsivogliano G, ed H: dico che E stia a G, come F ad H. *fig.* 118.

Si prendano di E, e di F gli altri ugualmente multiplici K, ed L; e similmente di G, e di H gli altri ugualmente multiplici M, ed N. E poichè E è tanto multiplice di A, quanto F di C; e si sono presi di E, e di F gli ugualmente multiplici K, ed L; sarà K tanto multiplice di A quanto L di C *. * 3. V.
Per la stessa ragione M sarà tanto multiplice di B, quanto N di D. E poiche A sta a B, come C a D; e si sono presi di A, e di C gli ugualmente multiplici K, ed L, e di B, e di D gli altri ugualmente multiplici qualunque M, ed N; ne segue, che se K supera M, anche L supererà N; se gli è uguale, gli sarà uguale; se n' è minore, ne sarà anche minore *. Ma sono K, ed L ugualmente * d.5.V.

multiplici di E, e di F; ed M, ed N anche sono ugualmente multiplici qualunque di G, e di H: dun-
* d.5.V. que come E a G, così starà F ad H *.

E quindi se la prima abbia alla seconda la stessa ragione, che la terza alla quarta; anche gli ugualmente multiplici della prima, e della terza serberanno la stessa ragione agli ugualmente multiplici della seconda, e della quarta, secondo qualunque multiplicità si prendano, se quelli si paragonino a questi. C.B.D.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Se una grandezza sia tanto multiplice di un'altra grandezza, quanto una, che togliesi dalla prima è multiplice di un' altra tolta dalla seconda; anche la rimanente sarà tanto multiplice della rimanente, quanto la tutta della tutta.

fig. 119. La grandezza AB sia tanto multiplice della grandezza CD, qnanto la tolta AE della tolta CF: dico che la rimanente EB sia tanto multiplice della rimaneute FD, quanto la tutta AB della tutta CD

Si ponga EB tanto multiplice di CG, quanto AE è multiplice di CF. E poichè AE è tanto multiplice di CF, quanto EB di CG; sarà AE tanto
* 1. V multiplice di CF, quanto AB di GF *. Ma si è supposto essere AE tanto multiplice di CF, quanto AB di CD; dunque AB è ugualmente multiplice sì di GF, che di CD: e perciò GF è uguale a CD; se ne tolga di comune CF, e sarà la rimanente GC ugua-

le alla rimanente FD. Per la qual cosa essendo AE tanto multiplice di CF, quando EB di CG, e CG uguale a DF; sarà AE tanto multiplice di CF, quando EB di FD. Ma si è supposto AE tanto multiplice di CF, quanto AB di CD; dunque EB è tanto multiplice di FD, quanto AB di CD; e quindi la rimanente EB è tanto multiplice della rimanente FD, quanto la tutta AB della tutta CD.

Se dunque una grandezza sia tanto multiplice di un' altra grandezza, quanto una che togliesi dalla prima è multiplice di un'altra tolta dalla seconda; anche la rimanente sarà tanto multiplice della rimanente, quanto la tutta della tutta. C.B.D.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Se due grandezze sieno ugualmente multiplici di due altre; e da quelle ne sien tolte due altre grandezze ugualmente multiplici di queste stesse: saranno anche le rimanenti, o uguali alle stesse, o ugualmente multiplici di esse.

Le due grandezze AB, CD sieno ugualmente multiplici delle altre due E, F; e di queste stesse ne sieno anche ugualmente multiplici le AG, CH, che si tolgono da quelle: dico che le rimanenti GB, HD, o sieno uguali alle E, F, o ugualmente multiplici di esse. *fig* 120.

Sia primieramente GB un multiplice di E: dico

che anche HD sia un ugualmente multiplice di F.

Si ponga CK tanto multiplice di F, quanto GB lo è di E. E poichè AG è tanto multiplice di E, quanto CH di F; ed è pure GB tanto multiplice di E, quanto CK di F; sarà AB tanto multiplice di E,
* 2. V quanto KH di F *: Ma si è supposta AB tanto multiplice di E, quanto CD di F: dunque KH è tanto multiplice di F, quanto CD dell' istessa F. Laonde essendo ciascuna delle KH, CD ugualmente multiplice della stessa F; dovrà KH essere uguale a CD: se ne tolga di comune CH; sarà la rimanente KC uguale alla rimanente HD. Ma KC è tanto multiplice di F, quanto GB lo è di E; dunque anche HD sarà tanto multiplice di F, quanto GB lo è di E. Similmente dimostreremo, che se GB fosse uguale ad E, anche HD sarebbe uguale ad F.

Perciò se due grandezze sieno ugualmente multiplici di due altre, e da quelle ne sien tolte altre grandezze ugualmente multiplici di queste stesse; saranno anche le rimanenti, o uguali alle stesse, o ugualmente multiplici di esse. C.B.D.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Le grandezze uguali hanno la stessa ragione ad una medesima grandezza: e questa ha la stessa ragione a ciascuna di quelle.

fig. 121. Sieno le grandezze uguali A, e B, ed un' altra qualunque C: dico che ciascuna delle A, e B abbia

a C la stessa ragione; e similmente, che C abbia a ciascuna delle A, e B la medesima ragione.

Si prendano di A, e B gli ugualmente multiplici D, ed E, e di C un qualunque altro multiplice F. E poichè D è tanto multiplice di A, quanto E di B, ed è A uguale a B; sarà anche D uguale ad E. Ma è poi F un' altra grandezza qualunque: dunque se D supera F, anche E supererà F; e se gli è uguale, gli sarà uguale; se minore, minore: sono poi D, ed E ugualmente multiplici di A, e di B, ed F è un qualunque altro multiplice di C; dunque sarà come A a C, così B a C *. * d. 5.V.

Dico di più, che C serbi la medesima ragione a ciascuna delle A, e B.

Poichè, fatto lo stesso apparecchio, dimostreremo similmente, che D sia uguale ad E: è poi F un' altra grandezza qualunque; dunque se F supera D, supererà anche E; se è uguale a D sarà anche uguale ad E; se minore, minore. Ma è F un multiplice di C; e D, ed E sono qualunque altri ugualmente multiplici di A, e di B; dunque C starà ad A, come C a B *. * d.5.V.

E perciò le grandezze uguali hanno la stessa ragione ad una medesima grandezza; e questa ha la stessa ragione a ciascuna di quelle. C.B.D.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

La maggiore di due grandezze disuguali ha ad una terza maggior ragione , che la minore : e questa terza ha alla minore maggior ragione, che alla maggiore .

fig. 122. Sieno le grandezze disuguali AB, BC, ed AB sia la maggiore ; sia di più D un' altra grandezza qualunque : dico che AB abbia a D maggior ragione, che BC a D : e che D serbi a BC maggior ragione , che ad AB .

Se delle AC , CB quella, ch' è più piccola sia minore di D , essa , o che sia AC, o pur CB, moltiplicata potrà divenire una volta maggiore di D * . Si multiplichi, finchè diventi maggiore di D ; e quante volte l'una si è multiplicata ; tante volte si multiplichi l'altra , e sia EF un tal multiplice di AC , FG poi l'ugualmente multiplice di CB : sarà quindi tanto EF , che FG maggiore di D . Se poi sì BC, che CA sia maggiore di D , basterà prendere di esse qualsivogliano ugualmente multiplici . In ciascuno di questi casi, si prenda di D il doppio H , il triplo K , e così successivamente , fintantochè quello , che si prende sia quel multiplice di D, che è il primo a superare FG : sia questo L ; e dinoti K quell'altro multiplice della stessa D, ch'è prossimamente minore di L.

* d.4.V.

E poichè L è il multiplice di D , ch' è il pri-

mo a superare FG, non sarà K maggiore FG; e perciò FG non sarà minore di K. Per la qual cosa essendo EF tanto multiplice di AC, quanto FG di CB; sarà anche FG tanto multiplice di CB, quanto EG di AB* : e perciò EG, ed FG sono u- * I. V. gualmente multiplici di AB, e di CB. Ma FG si è dimostrata non minore di K, e per costruzione EF è maggiore di D; quindi l' intera EG sarà maggiore di K, e D insieme. Ma K, e D insieme sono uguali ad L; dunque EG supera L, ed FG non supera la stessa L: sono poi EG, ed FG ugualmente multiplici di AB, e di BC, ed L è un certo multiplice di D; dunque AD ha a B maggior ragione, che BC a D*. * d.7. V.

Inoltre D a BC avrà maggior ragione, che D ad AB. Poichè, fatta la stessa costruzione, si dimostrerà similmente, che L superi FG; ma che non superi EG: è poi L un multiplice di D; ed FG, ed EG sono alcuni altri ugualmente multiplici di CB, e di AB; dunque sarà D a CB in maggior ragione di D ad AB*. * d.7. V.

Quindi la maggiore di due grandezze disuguali ha ad una terza maggior ragione, che la minore; e questa terza ha alla minore maggior ragione, che alla maggiore. C.B.D.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Le grandezze, che hanno ad una terza la stessa ragione sono uguali tra loro; e quelle grandezze alle quali una terza ha la medesima ragione sono uguali.

fig. 123. Abbia ciascuna delle A, B la stessa ragione a C: dico che A sia uguale a B. Poiche se A non è uguale a B, ciascuna di esse non avrà la stessa ragione a C*: ma glie l' ha; dunque A è uguale a B.

* 8. V.

Similmente abbia C a ciascuna delle A, B la stessa ragione: dico che A sia uguale a B.

Poichè se non è così, non avrà C la stessa ragione a ciascuna delle A, B*: ma glie l' ha; dunque necessariamente A è uguale a B.

* 8. V.

E perciò le grandezze, che hanno ad una terza la stessa ragione sono uguali tra loro; e quelle grandezze alle quali una terza ha la medesima ragione sono uguali. C.B.D.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

Di due grandezze, che hanno ragione ad una terza, quella, che ha a questa maggior ragione è la maggiore; ed è minore poi quella alla quale questa medesima terza ha maggior ragione.

Abbia A a C maggior ragione di B a C: dico *fig.* 124.
che A sia maggiore di B.

Poichè se A non è maggiore di B, o l'è uguale, o n'è minore. Or non è A uguale a B; poichè ciascuna delle A, B avrebbe la medesima ragione a C*. Ma non * 7. V.
gliel'ha; dunque A non è uguale a B. Nè tampoco A è minore di B; poichè A avrebbe a C minor ragione, che non ce ne ha B*. Ma non gliel'ha mi- * 8. V.
nore; perciò A non è minore di B. Si è anche dimostrato, che non l'è uguale: dunque A sarà maggiore di B.

Similmente abbia C a B maggior ragione, che C ad A: dico che B sia minore di A.

Poichè se B non è minore di A, o l'è uguale, o n'è maggiore. Ma non è B uguale ad A; perchè allora C avrebbe ad A la stessa ragione, che a B*. Ma non glie- * 7. V.
l'ha; dunque A non è uguale a B. Nè tampoco B è maggiore di A; poichè avrebbe C a B minor ragione, che ad A*. Ma non gliel'ha minore; * 8. V.
dunque B non è maggiore di A. Si è dimostrato, che neppure l'era uguale; dunque B sarà minore di A.

E perciò di due grandezze, che hanno ragione ad una terza, quella, che ha a questa maggior ragione è la maggiore; ed è poi minore quella alla quale questa medesima terza ha maggior ragione. C.B.D.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

Le ragioni che sono uguali ad una medesima ragione, sono uguali anche tra loro.

fig. 125. Sia come A a B, così C a D; e come C a D, così E ad F: dico che come A a B, così stia E ad F.

Si prendano di A, di C, e di E gli ugualmente multiplici G, H, e K; come pure di B, di D, e di F gli altri ugualmente multiplici qualunque L, M, ed N. E poichè A sta a B, come C a D; e si sono presi di A, e di C gli ugualmente multiplici G, ed H; e di B, e di D, gli altri ugualmente multiplici qualunque L, ed M: perciò se G supera L, anche H supererà M; se gli è uguale, gli sarà u-
* d.5. V. guale; e se minore minore *. Similmente poichè C sta a D, come E ad F; e si sono presi di C, e di E gli ugualmente multiplici H, e K; e di D, e di F gli altri ugualmente multiplici qualunque M, ed N: perciò se H supera M, anche K supererà N; se gli è uguale, gli sarà uguale; e se mi-
* d.5. V. nore, minore *. Or se H supera M, si è dimostrato, che anche G supererà L; e che se gli è uguale, gli sarà uguale; se minore, minore *. Dunque se G supera L, K supererà N; e se gli è uguale, gli sarà

uguale; se minore, minore. Sono poi G, e K ugualmente multiplici di A, e di E; ed L, ed N sono altri ugualmente multiplici qualunque di B, e di F. Quindi come sta A a B, così starà E ad F *. * d.5. V.

E perciò le ragioni, che sono uguali ad una medesima ragione, sono uguali tra loro. C.B.D.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

Se quante grandezze si vogliano sieno proporzionali; come sta un antecedente di esse al suo conseguente, così staranno tutti gli antecedenti insieme a tutti i conseguenti anche insieme presi.

Sieno quante grandezze si vogliano proporzionali A, B, C, D, E, F; e come A a B, così stia C a D, ed E ad F: dico che come A a B, così stiano tutti gli antecedenti A, C, E insieme a tutti i conseguenti B, D, F anche insieme presi. *fig.* 126.

Si prendano di A, di C, e di E gli ugualmente multiplici G, H, e K; e di B, di D, e di F gli altri ugualmente multiplici qualunque L, M, ed N. poichè E come A a B, così sta C a D, ed E ad F; e si sono presi di A, di C, e di E gli ugualmente multiplici G, H, e K, e di B, di D, e di F gli altri qualunque ugualmente multiplici L, M, ed N; se G supera L, H supererà M, e K, N; se G è uguale ad L, anche H, e K saranno rispettivamente uguali ad M, ed N; e se minore, minori *. Per la qual cosa se G supera L, anche G, H, e K dovranno supe- * d. 5 V

rare L, M, N; e se gli è uguale gli saranno uguali; se minore, minori; sono poi G, e G, H, K ugualmente multiplici di A, e di A, C, E; poichè se vi sieno quante grandezze si vogliano ugualmente multiplici di altrettante, ciascuna di ciascuna; quanto una è multiplice di una, tanto
* 1. V. tutte lo sono di tutte *: e per la medesima ragione anche L, ed L, M, N sono ugualmente multiplici di B, e di B, D, F. Quindi come A a
* d.5. V. B, così dovrà stare A, C, E a B, D, F *.

Dunque se quante grandezze si vogliano sieno proporzionali, come sta un antecedente di esse al suo conseguente; così staranno tutti gli antecedenti insieme a tutti i conseguenti anche insieme presi.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Se la prima abbia alla seconda la stessa ragione, che la terza alla quarta; e la terza poi abbia alla quarta maggior ragione, che la quinta alla sesta: anche la prima alla seconda avrà maggior ragione, che la quinta alla sesta.

fig. 127. La prima A alla seconda B abbia la stessa ragione, che la terza C alla quarta D; e poi la terza C abbia alla quarta D maggior ragione, che la quinta E alla sesta F: dico che anche la prima A abbia alla seconda B maggior ragione, che la quinta E alla sesta F.

Poichè C ha a D maggior ragione, che E ad F,

vi saranno tali ugualmente multiplici di esse C, ed E, e tali altri di D, ed F, che il multiplice di C superi quello di D; ma l' ugualmente multiplice di E non superi quello di F *. Prendansi, e * d.7. V.
sieno di C, e di E gli ugualmente multiplici G, ed H; e di D, e di F gli altri K, ed L in modo, che G superi K; ma H non superi L: e poi quanto è G multiplice di C, tanto si faccia M multiplice di A; e quanto K è multiplice di D, tanto si faccia N multiplice di B. E poichè A sta a B, come C a D, e si sono presi di A, e di C gli ugualmente multiplici M, e G; e di B, e di D gli altri ugualmente multiplici N, e K: se M supera N, G supererà K; e se gli è uguale, gli sarà uguale; se minore, minore *. Ma G supera K; dunque * d.5. V.
anche M supererà N: H poi non supera L; e sono M, ed H ugualmente multiplici di A, e di E, ed N, ed L sono pure altri ugualmente multiplici di B, e di F: dunque A avrà a B maggior ragione, che E ad F *. * d.7. V.

E perciò se la prima abbia alla seconda la stessa ragione, che la terza alla quarta; la terza poi abbia alla quarta maggior ragione, che la quinta alla sesta: anche la prima alla seconda avrà maggior ragione, che la quinta alla sesta. C.B.D.

Cor. E se la prima abbia alla seconda maggior ragione, che la terza alla quarta; la terza poi abbia alla quarta la stessa ragione, che la quinta alla sesta; si dimostrerà similmente, che la prima debba anche avere alla seconda maggior ragione che la quinta alla sesta.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Se la prima abbia alla seconda la stessa ragione, che la terza alla quarta; e queste quattro grandezze sieno dello stesso genere, e sia la prima maggiore della terza, anche la seconda sarà maggiore della quarta: e se uguale, uguale; se minore, minore.

fig. 128. La prima A abbia alla seconda B la stessa ragione, che la terza C alla quarta D; e sia A maggiore di C: dico che anche B sia maggiore di D.

Poichè A è maggiore di C, e B è una terza grandezza qualunque; avrà A a B maggior ragione, che
* 8. V. C a B *. Ma come A a B, così sta C a D; dun-
* 13. V. que C avrà a D maggior ragione, che C a B *. Or quella grandezza alla quale una terza ha maggior
* 10. V. ragione è minore * : quindi D è minore di B; e perciò B sarà maggiore di D.

Sia in secondo luogo A uguale a C: dico che B sia uguale a D.

Poichè essendo A a B, come C, o sia A a D;
* 9. V. sarà B uguale a D *.

Finalmente se A sia minore di C; sarà anche B minore di D.

Imperocchè sarà C maggiore di A: e perciò essendo C a D, come A a B si dimostrerà, come nel caso primo, che D sia maggiore di B, cioè B minore di D.

Quindi se la prima abbia alla seconda la stessa

ragione, che la terza alla quarta; e queste quattro grandezze sieno dello stesso genere, e sia la prima maggiore della terza, anche la seconda sarà maggiore della quarta: e se uguale, uguale; se minore, minore. C.B.D.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Le parti paragonate tra se stesse, hanno la medesima ragione, che i loro ugualmente multiplici.

Sia AB tanto multiplice di C, quanto DE di F: *fig.* 129. dico che come C ad F, così stia AB a DE.

Poichè AB è tanto multiplice di C, quanto DE di F; quante grandezze vi sono in AB uguali a C, altrettante ve ne saranno in DE uguali ad F. Dividasi perciò AB in grandezze uguali a C, le quali sieno AG, GH, HB; e DE si divida pure in grandezze uguali ad F, cioè in DK, KL, LE; sarà il numero delle AG, GH, HB uguale al numero delle DK, KL, LE. Or poichè sono uguali le AG, GH, HB, come pure sono tra loro uguali le DK, KL, LE; sarà come AG a DK, così GH a KL, ed HB ad LE: e perciò sarà anche come un antecedente al suo conseguente, così tutti gli antecedenti insieme a tutti i conseguenti anche insieme presi *. Dunque come AG a DK, così sta * 12. V. AB a DE. Ma AG è uguale a C, e DK ad F; quindi come C ad F, così starà AB a DE.

E perciò le parti paragonate tra se stesse hanno la medesima ragione, che i loro ugualmente multiplici. C.B.D.

Cor. E quindi se stia AB ad ED, come C ad F, ed AB sia un multiplice di C; dovrà anche ED essere un ugualmente multiplice di F.

* 15. V. Poichè se si ponga ED ugualmente multiplice di P, dovrà stare AB ad ED, come C a P*. Ma AB sta ad ED, come C ad F: perciò sarà C ad F,

*11. IV, * 7. V. come C a P*; e quindi P uguale ad F*, cioè *Se la prima abbia alla seconda la stessa ragione, che la terza alla quarta; e la prima sia un multiplice della terza; anche la seconda sarà un ugualmente multiplice della quarta.*

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

Se quattro grandezze del genere stesso sieno proporzionali, permutando saranno anche proporzionali.

fig. 130. Sieno proporzionali le quattro grandezze del genere stesso A, B, C, D, e sia come A a B, così C a D: dico che permutando sieno anche proporzionali, cioè che stia A a C, come B a D.

Poichè prendansi di A, e di B gli ugualmente multiplici E, ed F; e di C, e di D gli altri ugualmente multiplici qualunque G, ed H. E perchè E è tanto multiplice di A, quanto F di B; e che le parti paragonate tra se stesse hanno la medesima ragione,

* 15. V. che i loro ugualmente multiplici*; sarà A a B, come E ad F. Ma come A a B, così sta C a D; dunque

* 11. V. come C a D, così sta E ad F*. Similmente poichè G, ed H sono ugualmente multiplici di C, e

D; sarà pure C a D, come G ad H *. Ma come * 15. V.
C a D, così sta E ad F: dunque E sta ad F,
come G ad H*. Or se quattro grandezze sono pro- * 11. V.
porzionali, e la prima sia maggiore della terza, la
seconda sarà maggiore della quarta; e se uguale, uguale;
se minore, minore*: perciò se E supera G, anche F * 14. V.
supererà H; e se uguale, uguale; se minore, minore. Ma E, ed F sono ugualmente multiplici di
A, e di B; e G, ed H sono anche qualunque altri ugualmente multiplici di C, e di D; dunque
A starà a C, come B a D *. * d.5. V.

Quindi se quattro grandezze dello stesso genere sieno proporzionali, permutando saranno anche proporzionali. C.B.D.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Se le quantità composte sieno proporzionali, dividendo saranno anche proporzionali.

Sieno proporzionali le quantità composte AB, BE, *fig.* 131.
CD, DF, e sia come AB a BE, così CD a DF: dico che dividendo sieno anche proporzionali, cioè che stia AE ad EB, come CF ad FD.

Si prendano di AE, di EB, di CF, e di FD gli ugualmente multiplici GH, HK, LM, ed MN; e similmente di EB, e di FD gli altri ugualmente multiplici qualunque KX, ed NP. E poichè GH è tanto multiplice di AE, quanto HK di EB; sarà GH
tanto multiplice di AE, quanto GK di AB*. Ma è * 1. V.
poi GH tanto multiplice di AE, quanto LM di CF:

dunque GK è tanto multiplice di AB, quanto LM di CF. Similmente poichè LM è tanto multiplice di CF, quanto MN di FD; sarà LM tanto multi-
* 1. V. plice di CF, quanto LN di CD*. Ma era LM tanto multiplice di CF, quanto GK di AB; dunque GK è tanto multiplice di AB, quanto LN di CD. E perciò sono GK, ed LN ugualmente multiplici di AB, e di CD.

Or, poichè HK è tanto multiplice di EB, quanto MN di FD; ed è poi KX tanto multiplice della stessa EB, quanto NP della stessa FD: anche la composta HX sarà tanto multiplice di EB, quanto la com-
* 2. V. posta MP è multiplice di FD*. Per la qual cosa essendo AB a BE, come CD a DF; ed essendosi presi di AB, e di CD gli ugualmente multiplici GH, ed LN; e di EB, e di FD gli altri ugualmente multiplici qualunque HX, ed MP: se GK supera HX, anche LN su-
* d. 5. V. pererà MP; e se uguale, uguale; se minore, minore*. Adunque GK superi HX, toltone di comune HK, anche GH supererà KX. Ma se GK supera HX, LN supera MP; dunque LN supera MP: e perciò toltone di comune MN; LM supererà NP. E quindi se GH supera KX, anche LM supererà NP. Dimostreremo similmente, che se GH sia uguale a KX, LM sia uguale ad NP; e se minore, minore: e sono GH, ed LM ugualmente multiplici di AE, e di CF; e KX, ed NP sono altri ugualmente multiplici qualunque di EB, e di FD; dunque come AE ad EB, così
* d.5. V. starà CF ad FD *.

E perciò se le quantità composte sieno proporzionali, dividendo saranno anche proporzionali. C.B.D.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Se le quantità divise sieno proporzionali, componendo saranno anche proporzionali.

Sieno proporzionali le quantità divise AE, EB, CF, FD; e come AE ad EB, così stia CF ad FD: dico che componendo sieno anche proporzionali; cioè che stia AB a BE, come CD a DF. *fig.* 152.

Poichè se non sta AB a BE, come CD a DF; sarà AB a BE, come CD ad una grandezza minore di DF, o ad una maggiore. Sia in primo luogo ad una minore, come DG. E poichè come AB a BE, così sta CD a DG; le quantità composte essendo proporzionali, anche dividendo saranno proporzionali *; dunque come AE ad EB, così sta* 17. V.
CG a GD. Ma si è supposto essere AE ad EB, come CF ad FD; perciò come CG a GD, così sta CF ad FD *. Or queste grandezze sono dello stes- * 11. V.
so genere, e la prima CG è maggiore della terza CF; dunque anche la seconda DG sarà maggiore della quarta DF *: ma n'è minore, il che è impos- * 14. V.
sibile. Quindi non stà AB a BE, come CD a DG minore di DF. Similmente dimostreremo, che non può stare AB a BE, come CD ad una grandezza maggiore di DF: perciò necessariamente dovrà stare AB a BE, come CD a DF.

Dunque se le quantità divise sieno proporzionali, componendo saranno anche proporzionali. C.B.D.

Cor. Ciò posto se sia come AB a BE, così CD a DF,
* 17. V. dividendo sarà AE ad EB, come CF ad FD *;
* pr.2.V. invertendo BE ad EA, come DF ad FC *: e per-
* 18. V. ciò componendo starà BA ad AE, come DC a CF *.

E quindi *se le quattro grandezze AB, BE, CD, DF sono proporzionali, convertendo anche le altre BA, AE, DC, DF saranno proporzionali.*

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

Se sia come la tutta alla tutta, così la tolta alla tolta; sarà pure la rimanente alla rimanente, come la tutta alla tutta.

fig. 133. Sia come la tutta AB alla tutta CD, così la tolta AE alla tolta CF: dico che anche la rimanente EB stia alla rimanente FD, come la tutta AB alla tutta CD.

Poichè come la tutta AB alla tutta CD, così sta AE a CF; sarà permutando come BA ad AE, co-
* 16. V. sì DC a CF *: e perciò convertendo sarà AB a
*cor.18.V BE, come CD a DF *; e di nuovo permutando sarà AB a CD, come BE a DF: cioè la rimanente EB alla rimanente FD, come la tutta AB alla tutta CD.

Laonde se la tutta stia alla tutta, come la tolta alla tolta; sarà anche la rimanente alla rimanente, come la tutta alla tutta. C.B.D.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

Se tre grandezze sieno in proporzione ordinata con tre altre grandezze; e la prima sia maggiore della terza; anche la quarta sarà maggiore della sesta: e se uguale, uguale; se minore, minore.

Sieno le tre grandezze A, B, C in proporzione ordinata con le altre tre D, E, F, cioè stia A a B, come D ad E, e B a C, come E ad F; e sia A maggiore di C: dico che anche D sia maggiore di F; e se uguale, uguale; se minore, minore. *fig.* 134.

Poichè A è maggiore di C, e B è un' altra grandezza qualunque; e la maggiore ha ad una terza maggior ragione, che la minore *; avrà A a B maggior ragione, che C a B. Ma come D ad E, così sta A a B; dunque anche D avrà ad E maggior ragione che C a B *. E poichè B sta a C, come E ad F; sarà invertendo C a B, come F ad E *; e perciò essendosi dimostrato, che stia D ad E in maggior ragione di C a B; dovrà anche stare D ad E in maggior ragione di F ad E *. Or di due grandezze, che serban ragione ad una terza è maggiore quella, che serba a questa maggior ragione *; dunque D è maggiore di F.

* 8. V.
* 13. V.
* pr. 2. V.
* cor. 15. V
* 10. V.

Che se A sia uguale a C; sarà anche D uguale ad F.

Poichè essendo A, e C uguali, e B un' altra grandezza qualunque; sarà A a B, come C a B *. Ma è poi A a B, come D ad E; e C a B, come * 7. V.

* 11. V F ad E; dunque D sta ad E, come F ad E *:
* 9. V e perciò D è uguale ad F *,

Sia finalmente A minore di C; sarà anche D minore di F.

Poichè essendo A minore di C; C sarà maggiore di A. Ma per ipotesi, ed invertendo, C sta a B,
* pr. 2. V come F ad E *, e B ad A, come E a D: dunque, per lo caso primo essendo C maggiore di A, sarà anche F maggiore di D; e perciò D minore di F.

Quindi se tre grandezze sieno in proporzione ordinata con tre altre grandezze; e la prima sia maggiore della terza; anche la quarta sarà maggiore della sesta: e se uguale, uguale; se minore, minore. C.B.D.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

Se tre grandezze sieno in proporzione perturbata con tre altre grandezze; e la prima sia maggiore della terza; anche la quarta sarà maggiore della sesta: e se uguale, uguale; se minore, minore.

fig. 135. Sieno le tre grandezze A, B, C in proporzione perturbata con le tre altre D, E, F, cioè stia A a B, come E ad F, e B a C, come D ad E; ed A sia maggiore di C: dico che anche D sia maggiore di F; e se uguale, uguale; se minore, minore.

Poichè A è maggiore di C; e B è un'altra grandezza,
* 8. V. avrà A a B maggior ragione, che C a B *. Ma come A a B, così sta E ad F; quindi anche E avrà ad F

maggior ragione, che C a B *. Ed essendo B a C, co- * 13. V
me D ad E; sarà invertendo C a B, come E a D *: * pr. 2. V
ma si è dimostrato, che E ha ad F maggior ragione, che C a B; dunque avrà pure E ad F maggior ragione, che E a D *. Or quella grandezza * co.13. V
è minore, cui una terza ha maggior ragione *; dun- * 10. V
que F è minore di D; e perciò D sarà maggiore di F.

Sia adesso A uguale a C; sarà anche D uguale ad F.

Imperocchè essendo uguali A, e C, e B una terza grandezza; starà A a B, come C a B *. Ma * 7. V
A sta a B, come E ad F; e C a B, come E a D; dunque E sta ad F, come E a D *: e perciò D * 11. V
è uguale ad F *. * 9. V

Sia, in terzo luogo, A minore di C; sarà D minore di F.

Poichè essendo A minore di C; sarà C maggiore di A. Or per ipotesi, ed invertendo, C sta a B, come E a D, e B ad A, come F ad E: ed è C maggiore di A: quindi, per lo caso primo sarà anche F maggiore di D; e perciò D minore di F.

Se dunque tre grandezze sieno in proporzione perturbata con tre altre grandezze; e la prima sia maggiore della terza; anche la quarta sarà maggiore della sesta: se uguale, uguale; se minore, minore. C.B.D.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

Se tre grandezze sieno in proporzione ordinata con tre altre grandezze; per equalità saranno ancora proporzionali.

fig. 135. Sieno le tre grandezze A, B, C in proporzione ordinata colle tre altre D,E,F; cioè sia A a B, come D ad E, e B a C, come E ad F: dico che stia anche A a C, come D ad F.

Si prendano di A, e di D gli ugualmente multiplici G, ed H; di B, e di E gli altri ugualmente multiplici qualunque K, ed L; e similmente di C, e di F gli ugualmente multiplici qualunque M, ed N. E poichè A sta a B, come D ad E, e di A, e di D se ne sono presi gli ugualmente multiplici qualunque G, ed H; e di B, e di E gli altri qualunque ugualmente multiplici K, ed L; sarà G ad H, co-
* 4 V me K ad L*: e per la stessa ragione dovrà stare K ad M, come L ad N. E perciò essendovi le tre grandezze G, K, ed M in ordinata ragione colle altre tre H, L, ed N; per equalità se G supera M, anche H supererà N; se uguale, ugua-
* 20 V le; e se minore, minore *. Ma G, ed H sono ugualmente multiplici di A, e di D; ed M, ed N sono pure altri ugualmente multiplici qualunque di C, e di F: dunque A starà a C, come D
* d. 5. V ad F *.

Quindi se tre grandezze sieno in proporzione ordinata con tre altre grandezze; per equalità saranno ancora proporzionali C.B.D.

PROPOSIZIONE. XXIII.

TEOREMA.

Se tre grandezze sieno in proporzione perturbata con tre altre grandezze; per equalità saranno ancora proporzionali.

Sieno le tre grandezze A, B, C in proporzione perturbata colle tre altre D, E, F; cioè come A a B, così stia E ad F, e come B a C, così D ad E: dico che come A a C, così stia D ad F. *fig.* 137.

Poichè si prendano di A, di B, e di D gli ugualmente multiplici G, H, e K; e di C, di E, e di F gli altri ugualmente multiplici qualunque L, M, ed N: ed essendo G, ed H ugualmente multiplici di A, e di B; e le parti serbandosi la stessa ragione dei loro ugualmente multiplici *; sarà A a B, come G ad H; e per la stessa ragione, E starà ad F, come M ad N. Ma come A a B, così sta E ad F; dunque anche G sta ad H, come M ad N *. Or poichè come B a C, così stà D ad E; e di B, e di D si sono presi gli ugualmente multiplici H, e K; e di C, e di E gli altri ugualmente multiplici qualunque L, ed M; sarà H ad L, come K ad M *. Ma si è dimostrato, che come G ad H, così sta M ad N; quindi essendovi le tre grandezze G, H, ed L in propor-

* 15. V

* 11. V

* 4. V

zione perturbata colle altre tre K, M, ed N; per equalità se G supera L, anche K supererà N; se
* 21. V uguale, uguale; e se minore, minore *. Ma sono G, e K ugualmente multiplici di A, e di D; ed L, N altri ugualmente multiplici qualunque di C, e di F: dunque come A a C, così sta D
* d. 5. V ad F *.

E perciò se tre grandezze sieno in proporzione perturbata con tre altre grandezze; per equalità saranno ancora proporzionali C.B.D.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

Se la prima abbia alla seconda la stessa ragione, che la terza alla quarta; ed abbia poi la quinta alla seconda la stessa ragione, che la sesta alla quarta: anche la composta dalla prima, e dalla quinta avrà alla seconda la stessa ragione, che la composta dalla terza, e dalla sesta alla quarta.

fig. 138. La prima AB abbia alla seconda C la stessa ragione, che la terza DE alla quarta F; ed abbia poi la quinta BG alla seconda C la stessa ragione, che la sesta EH alla quarta F: dico che AG composta dalla prima, e dalla quinta abbia anche alla seconda C la stessa ragione, che DH composta dalla terza, e dalla sesta alla quarta F.

Poichè BG sta a C, come EH ad F; invertendo
* pr. 2. V sarà C a BG, come F ad EH *. Per lo che essendo AB a C, come DE ad F, e C a BG, come

F ad EH; sarà per equalità AB a BG, come DE ad EH * : e perciò essendo proporzionali queste gran- * 22. V
dezze divise, anche componendo saranno proporzionali *; cioè sarà AG a GB, come DH ad HE. Ma * 18. V
è poi GB a C, come EH ad F: dunque di nuovo per equalità AG starà a C, come DH ad F.

Laonde se la prima abbia alla seconda la stessa ragione, che la terza alla quarta; ed abbia poi la quinta alla seconda la stessa ragione, che la sesta alla quarta: anche la composta dalla prima, e dalla quinta avrà alla seconda la stessa ragione, che la composta dalla terza, e dalla sesta alla quarta C.B.D.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA.

Se quattro grandezze sieno proporzionali; la massima di esse, e la minima saranno maggiori delle due rimanenti.

Sieno le quattro grandezze proporzionali AB,CD, *fig.* 139.
E, F, cioè AB stia a CD, come E ad F; ed AB sia la massima di esse, e perciò F la minima *: di- * pr. 2.V
co che le AB, ed F sieno maggiori delle CD, ed E. 14. V

Si ponga AG uguale ad E, e CH uguale ad F: e perchè AB sta a CD, come E ad F; ed AG è uguale ad E, CH ad F; sarà pure AB a DC, come AG a CH. Or essendo la tutta AB alla tutta CD, come la tolta AG alla tolta CH; anche la rimanente GB starà alla rimanente HD, come la tutta AB alla tutta CD *. Ma AB è maggiore di CD; * 19 V

* pr. 2. V dunque anche GB è maggiore di HD *. E perciò essendo AG uguale ad E, e CH ad F; saranno le AG, ed F uguali alle CH, ed E. E poichè aggiugnendo grandezze disuguali ad uguali, i tutti sono disuguali: essendo disuguali le GB, HD, per la ragione, che GB è maggiore, ne avverrà, che se a GB si aggiunga si AG, che F, e ad HD sì CH, che E, ne risulteranno necessariamente le AB, ed F maggiori delle CD, ed E.

E quindi se quattro grandezze sieno proporzionali; la massima di esse, e la minima saranno maggiori delle due rimanenti. C.B.D.

FINE DEL QUINTO LIBRO.

IL SESTO LIBRO
DEGLI
ELEMENTI DI EUCLIDE.

DEFINIZIONI

1. Figure rettilinee *simili* sono quelle, che hanno gli angoli uguali, ciascuno a ciascuno, e proporzionali i lati intorno agli angoli uguali.

2. Figure *reciproche* si dicono quelle, nelle quali i termini di una proporzione, che abbia luogo in esse, sieno così disposti, che s' incontrino gli estremi in una figura, ed i medj nell' altra; ed allora i termini di questa proporzione si dicono *reciprocamente proporzionali*.

3. Una linea retta dicesi segata in *estrema, e media ragione*, quando sta come la tutta alla porzione maggiore, così questa alla minore.

4. *Altezza* di una qualche figura è la perpendicolare, che dal vertice di essa si abbassa sopra la base.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

I triangoli , ed i parallelogrammi , che hanno l' altezza stessa, sono tra loro come le basi .

fig. 140. Sieno i triangoli ABC, ACD , ed i parallelogrammi EC , CF, che abbiano la stessa altezza , cioè la perpendicolare, che dal punto A si conduce alla BD : dico che come la base BC alla base CD , così stia il triangolo ABC al triangolo ACD , ed il parallelogrammo EC all' altro CF .

Imperocchè si prolunghi BD dall' una parte , e dall' altra verso H , ed L , e si pongano uguali alla base BC quante si vogliano BG, GH ; ed alla base CD , quante altre ne piaccia DK, KL : indi si uniscano le AG , AH , AK, AL . E poichè le CB, BG , GH sono uguali tra loro ; saranno anche uguali i triangoli AHG , AGB , ABC * : e perciò quanto multiplice è la base HC della base BC , altrettanto il triangolo AHC è multiplice del triangolo ABC . Per la stessa ragione quanto è multiplice la base LC della base CD , altrettanto l' è il triangolo ALC del triangolo ACD . E poichè se la base HC è uguale alla base CL , anche il triangolo AHC è uguale al triangolo ALC ; se la base HC supera la base CL , il triangolo AHC supererà l' altro ALC ; e se quella n' è minore , l' un triangolo sarà anche minore dell' altro . Avremo perciò quattro grandezze, cioè le due basi BC, CD ,

* 38. I.

ed i due triangoli ABC , ACD : si sono presi gli ugualmente multiplici della base BC , e del triangolo ABC , che sono la base HC , ed il triangolo AHC ; come pure gli altri ugualmente multiplici qualunque della base CD , e del triangolo ACD , cioè la base CL , ed il triangolo ALC ; e si è dimostrato , che se la base HC supera la base CL , il triangolo AHC debba pur superare il triangolo ALC; e se uguale , uguale; se minore , minore : dovrà perciò stare come la base BC alla base CD , così il triangolo ABC al triangolo ACD * . * d.5. V.

Or del triangolo ABC n' è doppio il parallelogrammo EC , e dell' altro triangolo ACD n' è pur doppio il parallelogrammo FC *; e le parti hanno * 41. I. tra esse la stessa ragione , che i loro ugualmente multiplici * : quindi sarà come il triangolo ABC al * 15. V. triangolo ACD , così il parallelogrammo EC al parallelogrammo CF . Laonde essendosi dimostrato , che stia come la base BC alla base CD , così il triangolo ABC al triangolo ACD ; e come quel triangolo a questo , così il parallelogrammo EC all' altro CF ; sarà anche come la base BC alla base CD , così il parallelogrammo EC all' altro CF .

Per la qual cosa i triangoli, ed i parallelogrammi, che hanno la stess' altezza, sono tra loro come le basi . C.B.D.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Se ad un lato di un triangolo siasi tirata una linea retta parallela; questa dividerà proporzionalmente gli altri due lati di esso triangolo: e se due lati di un triangolo siensi proporzionalmente divisi; la linea retta, che unisce le sezioni sarà parallela al rimanente lato del triangolo.

fig. 141. Si tiri ad un lato BC del triangolo ABC la parallela DE: dico che come BD a DA, così stia CE ad EA.

Si uniscano le BE, CD, sarà il triangolo BDE uguale all'altro CDE; poichè sono essi nella mede-
* 37. I sima base DE, e tra le stesse parallele DE, BC *: è poi ADE un altro triangolo; e le grandezze uguali serbano la stessa ragione ad una medesima
* 7. V. grandezza *; dunque come il triangolo BDE al triangolo ADE, così sta il triangolo CDE allo stesso ADE. Ma il triangolo BDE sta al triangolo ADE, come BD a DA; poichè avendo essi la stessa altezza, cioè la perpendicolare, che conducesi
* 1. VI. dal punto E alla AB, sono come le basi *; e per la stessa ragione il triangolo CDE sta all' altro ADE, come CE ad EA: quindi come BD a DA,
* 11. V. così sta CE ad EA *.

Sieno ora divisi proporzionalmente i lati AB, AC del triangolo ABC, cioè stia come BD a DA, così CE ad EA; e si unisca DE: dico che DE sia parallela a BC.

Fatta la stessa costruzione : poichè BD sta a DA, come CE ad EA; e poi come BD a DA, così sta il triangolo BDE all'altro ADE *; e come CE ad EA, così è pure il triangolo CDE al triangolo ADE : sarà il triangolo CDE al triangolo ADE, come il triangolo BDE allo stesso ADE. Per la qual cosa serbando ciascuno dei triangoli BDE, CDE la stessa ragione al triangolo ADE, sarà il triangolo BDE uguale al triangolo CDE *. Ma sono nella stessa base DE; ed i triangoli uguali costituiti nella base stessa, sono anche tra le medesime parallele *: dunque DE è parallela a BC.

* 1. VI.

* 9. V.

* 39. I.

E perciò se siasi tirata una linea retta parallela ad un lato di un triangolo; questa dividerà proporzionalmente gli altri due lati di esso : e se due lati di un triangolo siensi proporzionalmente divisi; la linea retta, che congiunge le sezioni sarà parallela all' altro lato del triangolo . C.B.D.

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA.

Se un angolo di un triangolo si divida per metà, e che la linea retta, che divide l' angolo divida anche la base; le porzioni della base avranno la stessa ragione, che i rimanenti lati del triangolo: e se le porzioni della base hanno la stessa ragione, che i rimanenti lati del triangolo; la linea retta, che si tira dal vertice alla sezione dividerà per metà l' angolo del triangolo.

fig. 142. Sia il triangolo ABC, e l' angolo BAC si divida per metà colla linea retta AD: dico che come BD a DC, così stia BA ad AC.

Per lo punto C si tiri CE parallela a DA, che convenga colla BA prolungata nel punto E. E poichè nelle linee rette parallele AD, EC vi cade la linea retta AC; sarà l' angolo ACE uguale all' an-
* 29. I. golo CAD *: quindi sarà pure l'angolo BAD uguale all' altro ACE. Similmente, poichè nelle parallele AD, EC vi cade la linea retta BAE; sarà l' angolo esteriore BAD uguale all' interiore, ed oppo-
* 29. I. sto AEC *. Ma si è anche dimostrato l' angolo ACE uguale all' angolo BAD; dunque sarà l' angolo ACE uguale all' altro AEC: e perciò il lato
* 6. I. AE è uguale al lato AC *. Or poichè ad un lato del triangolo BCE, cioè ad EC, si è tirata la parallela AD; sarà come BD a DC, così BA ad
* 2. VI. AE *. Ma AE è uguale ad AC; quindi come BD
* 7. V. a DC, così sta BA ad AC *.

Sia ora come BD a DC, così BA ad AC, e si unisca AD: dico che l'angolo BAC sia diviso per metà dalla linea retta AD.

Poichè, fatta la stessa costruzione, BD sta a DC come BA ad AC. Ma come BD a DC, così sta pure BA ad AE; mentre ad uno dei lati del triangolo BCE, cioè ad EC, si è tirata la parallela AD *: sarà dunque come BA ad AC, così BA ad * 2. VI.
AE; e perciò AC è uguale ad AE *, e l'angolo * 9. V.
AEC è uguale all'angolo ECA *. Ma l'angolo * 5. I.
AEC è uguale all'angolo esterno BAD; e l'angolo ACE è uguale all'alterno CAD *: quindi * 29. I.
sarà l'angolo BAD uguale all'altro CAD; e perciò l'angolo BAC è diviso per metà dalla linea retta AD.

Se dunque un angolo di un triangolo si divida per metà, e che la linea retta, che divide l'angolo divida anche la base; le parti della base avranno la stessa ragione, che i rimanenti lati del triangolo: e se le parti della base hanno la stessa ragione, che i rimanenti lati del triangolo; la linea retta, che dal vertice si tira alla sezione dividerà per metà l'angolo del triangolo. C.B.D.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Nei triangoli equiangoli sono proporzionali i lati intorno agli angoli uguali; e sono omologhi quei lati, che sottendono angoli uguali.

fig. 143. Sieno i triangoli equiangoli ABC, DCE, i quali abbiano l' angolo ABC uguale all' angolo DCE, l' angolo ACB all' altro DEC, e l' angolo BAC all' angolo CDE: dico che sieno proporzionali i lati dei triangoli ABC, DCE, che sono intorno agli angoli uguali; ed omologhi que' lati, che sottendono angoli uguali.

Si ponga BC per dritto con CE. E poichè gli
* 17. I. angoli ABC, ACB sono minori di due retti *, e l'angolo ACB è uguale all'angolo DEC; perciò saranno anche gli angoli ABC, DEC minori di due retti: e quindi le BA, ED prolungate s' incontreran-
* po. 5. no *. Si prolunghino, e s' incontrino nel punto F; ed essendo l'angolo DCE uguale all'angolo ABC, sarà
* 28. I. BF parallela a DC. *. Similmente poichè l' angolo ACB è uguale all'angolo DEC, sarà AC parallela ad FE *; quindi FACD è un parallelogrammo, e perciò FA è
* 34. I. uguale a CD, ed AC ad FD *. Or essendosi tirata ad uno dei lati del triangolo FBE, cioè ad FE, la parallela AC, sarà come BA ad AF, così
* 2. VI. BC a CE *; ma è poi AF uguale a CD; dunque come
* 7. V. BA a CD, così sta BC a CE *: e permutando co-
* 16. V. me AB a BC, così DC a CE *. Nel modo stesso poichè CD è parallela a BF; sarà come BC a CE

così FD a DE. Ma DF è uguale ad AC; dunque come BC a CE, così sta AC ad ED: e permutando CB sta a CA, come CE ad ED; quindi per equalità starà BA ad AC, come CD a DE * . * 22. V.

E perciò nei triangoli equiangoli sono proporzionali i lati intorno agli angoli uguali: e sono omologhi quei lati, che sottendono angoli uguali. C.B.D.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Se due triangoli abbiano i lati proporzionali, saranno equiangoli, ed avranno uguali quegli angoli, che sono sottesi dai lati omologhi.

Sieno i due triangoli ABC, DEF i quali abbiano i lati proporzionali; e sia come AB a BC, così DE ad EF; e come BA ad AC, così ED a DF; e perciò per equalità come BC a CA, così EF ad FD: dico che il triangolo ABC sia equiangolo al triangolo DEF, e che sieno uguali quegli angoli, che sono sottesi dai lati omologhi, cioè l'angolo ABC all' angolo DEF, l'angolo BCA all' angolo EFD, ed inoltre l'angolo BAC all' angolo EDF. *fig.* 144.

Imperocchè si costituiscano alla linea retta EF, ed ai punti E, F in essa, l'angolo FEG uguale all' angolo ABC, e l'angolo EFG uguale all' altro BCA *; sarà il terzo angolo BAC uguale al terzo angolo EGF *: e perciò il triangolo ABC è equiangolo all'altro EGF; e quindi hanno proporzionali i lati, che sottendono angoli uguali *. Adunque AB sta a BC, come GE

* 23. I.
* 32. I.
* 4. VI.

ad EF. Ma come AB a BC, così sta pure DE ad EF: perciò sarà come DE ad EF, così GE
* 11. V. ad EF *. Laonde avendo sì DE, che EG la
* 9. V. stessa ragione ad EF; sarà DE uguale ad EG *. Per la stessa ragione anche DF è uguale ad FG; e perciò essendo DE uguale ad EG, ed EF comune; le due DE, EF sono uguali alle due GE, EF, la base DF è pure uguale alla base FG: quindi l'angolo DEF è uguale all'angolo GEF, il triangolo DEF è uguale al triangolo GEF, ed i rimanenti angoli sono uguali ai rimanenti angoli, ciascuno a ciascuno, quelli che sono sottesi dai lati
* 8. I uguali *. Dunque l'angolo DFE è uguale all'angolo GFE, e l'angolo EDF all'angolo EGF. E poichè l'angolo FED è uguale all'angolo GEF, e l'angolo GEF all'angolo ABC; sarà anche l'angolo ABC uguale all'angolo FED. Per la stessa ragione l'angolo ACB è uguale all'angolo DFE; e quindi anche l'angolo in A è uguale a quello in D: perciò il triangolo ABC sarà equiangolo all'altro DEF.

E quindi se due triangoli abbiano proporzionali i lati; saranno equiangoli, ed avranno uguali gli angoli, che sono sottesi dai lati omologhi. C.B.D.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Se due triangoli abbiano un angolo uguale ad un angolo, e proporzionali i lati intorno a questi angoli uguali; saranno equiangoli i triangoli, ed avranno uguali gli angoli, che sono sottesi dai lati omologhi.

Sieno i due triangoli ABC, DEF, i quali abbiano *fig.* 145.
un'angolo BAC uguale ad un altro angolo EDF, e proporzionali i lati intorno a questi angoli uguali, cioè sia BA ad AC, come ED a DF: dico che il triangolo ABC sia equiangolo al triangolo DEF, e che l'angolo ABC sia uguale all'angolo DEF, e l'altro ACB all'altro DFE.

Si costituiscano alla linea retta DF, ed ai punti D, F in essa, l'angolo FDG uguale all'angolo BAC, o EDF, e l'angolo DFG uguale all'altro ACB; sarà il rimanente angolo in B uguale al rimanente
in G * : quindi il triangolo ABC è equiangolo * 32. I.
al triangolo DGF; e perciò stà BA ad AC come
GD a DF*. Ma si è supposto, che come BA ad AC, * 4. VI.
così stia ED a DF; dunque ED sta a DF, co-
me GD a DF * . E perciò essendo ED uguale a * 11. V.
DG *, e DF comune; le due ED, DF sono u- * 9. V.
guali alle due altre GD, DF, ciascuna a ciascuna; l'angolo EDF è anche uguale all'angolo GDF: dunque la base EF è uguale alla base FG, il triangolo EDF è uguale al triangolo GDF, ed i rima-

nenti angoli sono uguali ai rimanenti angoli, ciascuno a ciascuno, quelli che sono sottesi dai lati
* 4. I uguali *. È dunque l'angolo DFG uguale all'angolo DFE; e l'angolo in G all'angolo in E. Ma l'angolo DFG è uguale all'angolo ACB; perciò anche l'angolo ACB è uguale all'angolo DFE: si è poi supposto, che l'angolo BAC sia uguale all'angolo EDF; quindi il rimanente angolo in B sarà uguale al rimanente in E; per la qual cosa il triangolo ABC sarà equiangolo all'altro DEF.

Se dunque due triangoli abbiano un angolo uguale ad un angolo, e proporzionali i lati intorno a questi angoli uguali: saranno equiangoli i triangoli; ed avranno uguali gli angoli, che sono sottesi dai lati omologhi. C.B.D.

PROPOSIZIONE. VII.

TEOREMA.

Se due triangoli abbiano un angolo uguale ad un angolo, proporzionali i lati intorno a due altri angoli, e ciascuno dei rimanenti angoli sia, o acuto, o ottuso: essi triangoli saranno equiangoli, ed avranno uguali gli angoli intorno ai quali sono proporzionali i lati.

fig. 146. Sieno i due triangoli ABC, DEF, che abbiano un angolo uguale ad un angolo, cioè l'angolo BAC uguale all'angolo EDF, ed abbiano di più proporzionali i lati intorno agli altri angoli ABC, DEF tal che sia DE ad EF, come AB a BC; e primie-

ramente ciascuno dei rimanenti angoli in C, ed in F sia acuto: dico che il triangolo ABC sia equiangolo al triangolo DEF, che l'angolo ABC sia uguale all'angolo DEF, ed il rimanente angolo AEB uguale al rimanente angolo DFE.

Poichè se l'angolo ABC non è uguale all'angolo DEF; un di essi è maggiore: sia maggiore ABC: e si costituisca alla linea retta AB, ed al punto B in essa l'angolo ABG uguale all'angolo DEF. E poichè l'angolo in A è uguale a quello in D, e l'angolo ABG è pure uguale all'angolo DEF; sarà il rimanente angolo AGB uguale al rimanente DFE. Quindi il triangolo ABG è equiangolo al triangolo DEF; e perciò come AB a BG, così sta DE ad EF*. Ma come DE ad EF, così si è supposto essere AB * 4. VI
a BC; dunque come AB a BC, così sta la stessa AB a BG*. E perciò avendo AB la stessa ragione si a BC, * 11. V
che a BG, sarà BC uguale a BG*; e quindi l'angolo * 9. V.
in C è uguale all'angolo BGC: per lo che essendosi supposto acuto l'angolo in C, sarà anche acuto l'altro BGC; e per conseguenza sarà ottuso l'angolo AGB, che gli è adjacente. Ma si è dimostrato l'angolo AGB uguale a quello in F; dunque l'angolo in F è ottuso: si era supposto acuto; il che è assurdo. Quindi non è l'angolo ABC disuguale coll'angolo DEF; e perciò gli è uguale: è poi l'angolo in A uguale a quello in D; dunque il rimanente in C è uguale al rimanente in F. Laonde il triangolo ABC è equiangolo all'altro DEF.

Or si supponga essere ottuso ciascuno degli angoli in C, ed in F: dico che debba anche il triangolo ABC essere equiangolo all'altro DEF.

Poichè, fatta la stessa costruzione, dimostreremo similmente, che BC sia uguale a BG, e l'angolo in C uguale all'angolo BGC. Ma l'angolo in C è ottuso; perciò anche ottuso è l'altro BGC. E quindi due angoli del triangolo BGC non sono minori di due retti; il che è impossibile *: e perciò il triangolo ABC è equiangolo all'altro DEF; il che si dimostra come nel caso precedente.

* 17. I

Dunque se due triangoli abbiano un angolo uguale ad un angolo, proporzionali i lati intorno a due altri angoli, e ciascuno de' rimanenti angoli sia, o acuto, o ottuso: essi triangoli saranno equiangoli, ed avranno uguali gli angoli, intorno ai quali sono proporzionali i lati. C.B.D.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Se nel triangolo rettangolo dall' angolo retto si abbassi la perpendicolare sopra la base; i triangoli adjacenti alla perpendicolare saranno simili a tutto il triangolo, e tra di loro.

fig. 147. Sia il triangolo rettangolo ABC, che ha retto l'angolo BAC; e dal punto B sulla BC si abbassi la perpendicolare AD: dico che i triangoli ABD, ADC sieno simili a tutto il triangolo ABC, e tra di loro.

Poichè l'angolo BAC è uguale all'angolo ADB, essendo retto sì l'uno, che l'altro; e l'angolo in B è comune ai due triangoli ABC,ABD; sarà il rima-

nente angolo ACB uguale al rimanente angolo BAD: quindi il triangolo ACB è equiangolo all'altro ABD; perciò avranno proporzionali i lati intorno agli angoli uguali *, e saranno simili *. Dell' istessa maniera si dimostrerà, che il triangolo ADC sia simile all' altro ABC. È dunque ciascuno dei triangoli ABD, ADC simile a tutto il triangolo ABC.

* 4. VI
* d.1. VI

Dico di più che i triangoli ABD, ADC sieno anche simili tra loro.

Poichè l'angolo retto BDA è uguale al retto ADC, e si è dimostrato l'angolo BAD uguale all'angolo in C; sarà il rimanente angolo in B uguale al rimanente DAC: quindi il triangolo ABD è equiangolo, e perciò simile al triangolo ADC:

Se dunque nel triangolo rettangolo dall' angolo retto si abbassi la perpendicolare sopra la base; i triangoli adjacenti alla perpendicolare sono simili a tutto il triangolo, e tra di loro. C.B.D.

Cor. È chiaro da ciò, che *nel triangolo rettangolo la perpendicolare, che dall' angolo retto si abbassa sopra la base, sia media proporzionale tra i segmenti della base: ed inoltre, che ciascun lato sia medio proporzionale tra la base, ed il segmento ad esso contermine.*

Poichè nei triangoli equiangoli BDA, ADC, BD sta a DA, come DA a DC *; negli altri triangoli equiangoli ABC, DBA, BC sta a BA, come BA a BD: e finalmente nei triangoli equiangoli ABC, DAC, BC sta a CA, come CA a CD.

* 4. VI

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA.

Tagliare da una linea retta data quella parte, che se ne dimanda.

fig. 148. Sia data la linea retta AB: fa d'uopo tagliare da essa quella parte, che se ne dimanda,

Dal punto A si tiri la linea retta AC, la quale comprenda con AB un angolo qualunque; poi prendasi in AC un qualunque punto D, ed indi quanto AB è multiplice della parte, che se ne vuol tagliare, tanto si faccia AC multiplice di AD: indi si unisca BC, alla quale si tiri per D la parallela DE.

E poichè si è tirata la parallela ED ad un lato BC del triangolo ABC; sarà come CD a DA, co-
* 2. VI sì BE ad EA*: e componendo come CA ad AD,
* 18. V così BA ad AE*. Ma CA è multiplice di AD; dun-
* co. 15. V que BA sarà ugualmente multiplice di AE*: e perciò qualunque parte è AD di AC, la stessa parte sarà AE di AB; dunque AE è la parte, che doveva tagliarsi dalla linea retta AB.

Quindi dalla data linea retta AB se n'è tagliata la parte cercata AE. C.B.F.

PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA.

Data una linea retta non divisa, dividerla similmente ad un' altra linea retta divisa.

Sia data la linea retta non divisa AB, e la divisa AC: fa d' uopo dividere la linea retta non divisa AB similmente alla divisa AC. *fig.* 149.

Sia AC divisa nei punti D, E, e si dispongano le linee rette date ad angolo qualunque; poi si congiunga BC, e per gli punti D, ed E, si tirino le DF, ed EG parallele a BC; e per D si tiri DHK parallela ad AB: è dunque un parallelogrammo ciascuna delle figure FH, HB; e percio DH è uguale ad FG, HK a GB*. E poichè ad un lato del triangolo DKC,* cioè a KC, si è tirata la parallela HE, sarà come CE ad ED, così KH ad HD*: Ma KH è uguale a BG, ed HD a GF; dunque come CE ad ED, cosi sta BG a GF. Similmente poichè ad un lato del triangolo AGE, cioè ad EG, si è tirata la parallela FD, starà come ED a DA, così GF ad FA. Ma si è dimostrato, che come CE ad ED, così stia BG a GF: perciò come CE ad ED, così sta BG a GF; e come ED a DA, così è pure GF ad FA.

* 34. I. * 2. VI.

Quindi la data linea retta non divisa AB, si è divisa similmente all' altra linea retta divisa AC. C.B.F.

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA.

Date due linee rette, ritrovare la terza proporzionale in ordine ad esse.

fig. 150. Sieno date le due linee rette AB, AC, le quali dispongansi in modo, che contengano un angolo qualunque: fa d'uopo ritrovare la terza proporzionale in ordine ad esse AB, AC.

Si prolunghino le AB, AC nei punti D, ed E: indi si ponga BD uguale ad AC; ed unita BC, per D si tiri DE parallela a BC.

E poichè ad un lato del triangolo ADE, cioè a DE, si è tirata la parallela BC; sarà AB a BD,
* 2. VI. come AC a CE *. Ma BD è uguale ad AC; dunque BA starà ad AC, come AC a CE.

E perciò date due linee rette, si è ritrovata in ordine ad esse la terza proporzionale. C.B.F.

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA.

Date tre linee rette, ritrovare la quarta proporzionale in ordine ad esse.

fig. 151. Sieno date le tre linee rette A, B, C: fa d'uopo ritrovare la quarta proporzionale in ordine ad esse.

Si espongano due linee rette DE, DF in modo, che contengano un qualunque angolo EDF; e si ponga DG uguale ad A, GE uguale a B, e DH uguale a C: poi unita GH, le si tiri per E la parallela EF.

E poichè ad un lato del triangolo DEF, cioè ad EF, si è tirata la parallela GH; sarà DG a GE, come DH ad HF*. Ma DG è uguale ad A, GE è* uguale a B, e DH è uguale a C; dunque A starà a B, come C ad HF. * 2. VI.

E perciò date tre linee rette, si è trovata in ordine ad esse la quarta proporzionale. C.B.F.

PROPOSIZIONE XIII.

PROBLEMA.

Date due linee rette, ritrovare tra esse la media proporzionale.

Sieno date le due linee rette AB, BC: fa d'uopo ritrovare tra esse la media proporzionale. *fig.* 152.

Dispongansi per dritto: e sopra di essa AC si descriva il semicerchio ADC; dal punto B si tiri BD perpendicolare ad AC*, e si uniscano le AD, DC. * 11. I

E poichè l'angolo ADC nel semicerchio è retto*: * 31. III. perciò nel triangolo rettangolo ADC, dall'angolo retto si è condotta la perpendicolare DB alla base; quindi sarà DB media proporzionale tra i segmenti AB, BC di essa base *. *co.8.VI.

Adunque date due linee rette, si è ritrovata tra esse la media proporzionale. C.B.F.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

I parallelogrammi uguali, e che hanno un angolo uguale ad un angolo, sono figure reciproche; ed hanno reciprocamente proporzionali i lati intorno agli angoli uguali: e quei parallelogrammi, che hanno un angolo uguale ad un angolo, ed i lati intorno a questi angoli reciprocamente proporzionali, e che sono perciò figure reciproche, sono uguali tra loro.

fig. 153. Sieno i parallelogrammi uguali AB, BC, i quali abbiano uguali gli angoli in B; e pongansi per dritto le DB, BE; saranno anche per dritto le FB,
* 14. I. BG *: dico ch' essi parallelogrammi AB, BC sieno figure reciproche, ed abbiano reciprocamente proporzionali i lati intorno agli angoli uguali, cioè che stia DB a BE, come GB a BF.

Si compisca il parallelogrammo FE: e poichè il parallelogrammo AB è uguale al parallelogrammo BC, ed FE è un altro parallelogrammo; sarà AB
* 7. V. ad FE, come BC ad FE *. Ma il parallelogram-
* 1. VI. mo AB sta all'altro FE, come DB a BE *; e similmente il parallelogrammo BC sta allo stesso FE, come GB a BF; dunque DB sta a BE, come GB a BF; e perciò i lati dei parallelogrammi AB, BC, intorno agli angoli uguali, sono reciprocamente proporzionali.

Ora sieno reciprocamente proporzionali i lati,

intorno agli angoli uguali : e sia come DB a BE, così GB a BF : dico che il parallelogrammo AB sia uguale al parallelogrammo BC.

Imperocchè essendo DB a BE, come GB a BF; e come DB a BE, così il parallelogrammo AB all' altro FE*; e similmente come GB a BF, così il parallelogrammo BC all' altro FE : sarà il parallelogrammo AB all' altro FE, come il parallelogrammo BC allo stesso FE*; e perciò il parallelogrammo AB è uguale all' altro BC *.

* 1. VI
* 11. V
* 9. V

Quindi i parallelogrammi uguali, e che hanno un angolo uguale ad un angolo, sono figure reciproche; ed il resto come nell' enunciazione. C.B.D.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

I triangoli uguali, e che hanno un angolo uguale ad un angolo, sono figure reciproche; ed hanno reciprocamente proporzionali i lati intorno agli angoli uguali : e quei triangoli, che hanno un angolo uguale ad un angolo, ed i lati intorno a questi angoli reciprocamente proporzionali, cioè che sono figure reciproche, sono tra loro uguali.

I triangoli uguali ABC, ADE abbiano un angolo uguale ad un angolo, cioè l' angolo BAC uguale all' angolo DAE : dico che essi sieno figure reciproche; ed abbiano reciprocamente proporzionali i lati intorno agli angoli uguali, vale a dire, che stia CA ad AD, come EA ad AB. *fig.* 154.

Si dispongano essi triangoli in modo, che CA sia per dritto con AD; sarà anche BA per dritto con AE: si unisca BD. E poichè il triangolo ABC è uguale al triangolo ADE, ed ABD è un altro triangolo; sarà come il triangolo CAB all' altro BAD, così il triangolo ADE allo stesso BAD. Ma come il triangolo CAB al triangolo BAD, così sta
* 1. VI. CA ad AD *; e come il triangolo EAD allo stesso BAD, così sta EA ad AB: dunque come CA ad AD, così sta EA ad AB. E perciò i triangoli ABC, ADE sono figure reciproche, ed hanno reciprocamente proporzionali i lati intorno agli angoli uguali.

Or i triangoli ABC, ADE abbiano reciprocamente proporzionali i lati intorno agli angoli uguali; vale a dire come CA ad AD, così stia EA ad AB, e sieno perciò essi figure reciproche: dico che il triangolo ABC sia uguale al triangolo ADE.

Poichè, unita come prima BD, essendo come CA ad AD, così EA ad AB; e come CA ad AD, così
* 1. VI. il triangolo ABC all'altro BAD *, e similmente come EA ad AB, così il triangolo EAD all'altro BAD: sarà come il triangolo ABC al triangolo BAD, così
* 11. V. il triangolo EAD allo stesso BAD *. Per la qual co-
* 9. V. sa sarà il triangolo ABC uguale al triangolo ADE*.

E perciò i triangoli uguali, e che hanno un angolo uguale ad un angolo, sono figure reciproche; ed il resto come nell' enunciazione. C.B.D.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

Se quattro linee rette sieno proporzionali ; il rettangolo contenuto dalle estreme è uguale a quello, che si contiene dalle medie : e se il rettangolo contenuto dalle estreme sia uguale a quello, che si contiene dalle medie; le quattro linee rette saranno proporzionali.

Sieno le quattro linee rette proporzionali AB, CD, E, F, e sia come AB a CD, così E ad F: dico che il rettangolo contenuto dalle linee rette AB, ed F, sia uguale all'altro, che si contiene dalle CD, ed E. *fig.* 155.

Si conducano dai punti A, e C le perpendicolari AG, e CH alle AB, e CD : si ponga AG uguale ad F, e CH uguale ad E; e si compiano i parallelogrammi BG, DH. E poichè come AB a CD, così sta E ad F : ed è E uguale a CH, ed F ad AG; perciò sarà come AB a CD, così CH ad AG : e quindi i lati dei parallelogrammi BG, DH, che sono intorno agli angoli uguali, sono reciprocamente proporzionali. Ma quando i lati intorno agli angoli uguali dei parallelogrammi equiangoli sono reciprocamente proporzionali, essi sono uguali *: dunque il parallelogrammo BG è uguale al parallelogrammo DH. * 14. VI.
Or il parallelogrammo BG è quello ch'è contenuto dalle linee rette AB, ed F; poichè AG è uguale ad F, ed il parallelogrammo DH è contenuto dalle CD, ed E,

essendo CH uguale ad E: quindi il rettangolo contenuto dalle AB, ed F è uguale all'altro, che si contiene dalle CD, ed E.

Sia ora il rettangolo contenuto dalle AB, ed F uguale a quello, che si contiene dalle CD, ed E: dico che le quattro linee rette sieno proporzionali; cioè che stia AB a CD, come E ad F.

Fatta la stessa costruzione: poichè il rettangolo contenuto dalle AB, ed F è uguale all'altro, che si contiene dalle CD, E; ed il rettangolo contenuto dalle AB, ed F è BG, poichè AG è uguale ad F, e l'altro rettangolo contenuto dalle CD, ed E è DH, per esser CH uguale ad E; sarà il parallelogrammo BG uguale all' altro DH. Ma sono di più equiangoli; ed i parallelogrammi uguali, ed equiangoli hanno i lati intorno agli angoli uguali reciprocamente proporzionali: perciò come AB a CD, così sta CH ad AG. Ed è poi CH uguale ad E, AG ad F; dunque AB sta a CD, come E ad F.

E perciò se quattro linee rette sieno proporzionali; il rettangolo contenuto dalle estreme è uguale a quello, che si contiene dalle medie: e se il rettangolo contenuto dalle estreme sia uguale a quello, che si contiene dalle medie; le quattro linee rette saranno proporzionali. C.B.D.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Se tre linee rette sieno proporzionali; il rettangolo contenuto dalle estreme sarà uguale al quadrato, che si descrive sulla media: e saranno proporzionali tre linee rette, se il rettangolo contenuto dalle estreme sia uguale al quadrato descritto sulla media.

Sieno le tre linee rette proporzionali A, B, C: *fig.* 156. e stia come A a B, così B a C: dico che il rettangolo contenuto da A, e C sia uguale al quadrato, che si descrive sulla media B.

Si ponga D uguale a B: e poichè come A a B, così sta B a C, e che B è uguale a D; sarà come A a B, così D a C*. Ma se quattro linee rette sono proporzionali; il rettangolo contenuto dalle estreme è uguale a quello, che si contiene dalle medie*: dunque il rettangolo contenuto da A, e C è uguale a quello, che si contiene da B, e D. Or il rettangolo contenuto da B, e D è uguale al quadrato di B; poichè B è uguale a D: perciò anche il rettangolo contenuto da A, e C è uguale al quadrato di B.

* 7. V.

* 16. VI.

Sia ora il rettangolo contenuto da A, e C uguale al quadrato, che si descrive sulla B: dico che come A a B, così stia B a C.

Fatta la stessa costruzione: poichè il rettangolo contenuto da A, e C è uguale al quadrato di B; ed il quadrato di B è lo stesso, che il rettangolo contenuto da B, e D, perchè B è uguale a D; sa-

rà il rettangolo contenuto da A, e C uguale a quello, che si contiene da B, e D.. Ma sono proporzionali quattro linee rette, se il rettangolo contenuto dalle estreme è uguale a quello, che si con-
* 16. VI tiene dalle medie *; dunque come A a B, così sta D a C. È poi B uguale a D: dunque come A a B, così sta B a C.

E perciò se tre linee rette sieno proporzionali; il rettangolo contenuto dalle estreme è uguale al quadrato, che si descrive sulla media: e sono proporzionali tre linee rette, se il rettangolo contenuto dalle estreme sia uguale al quadrato descritto sulla media. C.B.D.

PROPOSIZIONE XVIII.

PROBLEMA.

Descrivere su di una data linea retta un rettilineo simile, e similmente posto ad un rettilineo dato.

fig. 157. Sia data la linea retta AB, e dato anche il rettilineo CDEFG: fa d' uopo descrivere snlla linea retta AB un rettilineo simile, e similmente posto al rettilineo dato CDEFG.

Si divida il rettilineo CDEFG in triangoli per mezzo delle DG, DF, e poi alla linea retta AB, e nei punti A,B in essa si costituisca l'angolo BAH uguale all'angolo in C, e l'angolo ABH uguale all' altro CDG; sarà il terzo angolo CGD uguale al terzo angolo AHB: e perciò il triangolo CGD è

equiangolo all'altro AHB . Similmente si costituiscano alla linea retta BH, ch'è un lato del triangolo ABH omologo all'altro DG del triangolo CDG, e ne' punti H, B in essa l' angolo BHK uguale all' angolo DGF, e l'angolo HBK uguale all'altro GDF; sarà il terzo angolo in K uguale al terzo angolo in F: e perciò il triangolo BHK è pure equiangolo al triangolo DGF . In seguito alla linea retta BK, ch'è un lato del triangolo BHK omologo al lato DF del triangolo DGF, e ne' punti K, B in essa si costituiscano l'angolo BKL uguale all' angolo DFE, e l'angolo KBL uguale all'altro FDE; sarà il terzo angolo in L uguale al terzo in E; e perciò il triangolo BKL sarà equiangolo all' altro DFE : e così si continui a fare se nel rettilineo CDEFG vi sieno altri triangoli. Or poichè l'angolo AHB è uguale all' angolo CGD, e l'angolo BHK all'angolo DGF; sarà tutto l' angolo AHK uguale a tutto l' altro CGF: e per la stessa ragione l'angolo HKL è uguale all' angolo GFE. Di più l'angolo ABH è uguale all' angolo CDG, l'angolo HBK all'angolo GDF, e l'angolo KBL all' altro FDE; quindi tutto l' angolo ABL è uguale a tutto l' angolo CDE: sono anche gli angoli in A, ed in L uguali rispettivamente a quelli in C, ed in E; dunque il rettilineo ABLKH è equiangolo all'altro CDEFG. Ma di più questi rettilinei hanno proporzionali i lati intorno agli angoli uguali; poichè essendo simili i triangoli BAH, e DCG, BA sta ad AH, come DC a CG, ed AH sta ad HB, come CG a GD*: * d.1.VI. è poi anche BH ad HK, come DG a GF, perchè sono anche simili i triangoli BHK, DGF; quindi per equalità sarà AH ad HK, come CG a GF*. E * 22.V.

similmente si dimostrerà HK a KL, come GF ad FE. È poi per gli triangoli simili KLB,FED,KL ad LB, come FE ad ED, ed LB a BK, come ED a
* 4. IV DF*: ma è anche KB a BH, come FD a DG, per gli triangoli simili KBH, FDG; quindi per equalità sarà LB a BH, come ED a DG. E poichè essendo simili i triangoli HBA,GDC sta pure HB a BA, come GD a DC; sarà di nuovo per equalità LB a BA, come ED a DC. Adunque i rettilinei ABLKH, e CDEFG, che si erano già dimostrati equiangoli, hanno anche proporzionali i lati intorno agli angoli uguali; e perciò sono simili.

Laonde si è descritto su di una linea retta data un rettilineo simile, e similmente posto ad un rettilineo dato. C.B.F.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

I triangoli simili sono tra loro in ragion duplicata dei lati omologhi.

fig. 158. Sieno i triangoli simili ABC, DEF; e sia l' angolo in B uguale a quello in E, ed AB a BC, come DE ad EF; in modo tale, che il lato BC sia omologo al lato EF: dico che il triangolo ABC serbi al triangolo DEF ragion duplicata di quella, che ha BC ad EF.

Si trovi in ordine alle BC, EF la terza propor-
* 11. VI. zionale BG *, sicchè sia BC ad EF, come EF a BG; e si unisca GA. E poichè come AB a BC,

così sta DE ad EF, e che queste grandezze sono omogenee; sarà permutando, come AB a DE, così BC ad EF *. Ma come BC ad EF, così sta * EF a BG; dunque AB sta a DE, come EF a BG. E perciò nei triangoli ABG, DEF si reciprocano i lati intorno agli angoli uguali. Ma quei triangoli, che hanno un angolo uguale ad un angolo, ed i lati intorno a questi angoli reciprocamente proporzionali, sono uguali *; dunque il triangolo ABG * è uguale al triangolo DEF. Or essendo BC ad EF come EF a BG; e perchè se tre linee rette sono proporzionali, la prima dicesi avere alla terza ragion duplicata di quella, che ha la prima alla seconda *; * avrà perciò BC a BG ragion duplicata di BC ad EF: è poi come BC a BG, così il triangolo ABC al triangolo ABG *; avrà dunque il triangolo ABC * al triangolo ABG ragion duplicata di quella, che BC ha ad EF. Per la qual cosa essendo il triangolo ABG uguale al triangolo DEF; anche il triangolo ABC serberà al triangolo DEF ragion duplicata di quella, che ha BC ad EF *.

16. V. 15. VI. d. 10. V. 1. VI. * 7. V.

Quindi i triangoli simili sono tra loro in ragion duplicata de' lati omologhi. C.B.D.

Cor. Da ciò si rileva chiaramente, che

Se tre linee rette sieno proporzionali, stia come la prima alla terza, così un triangolo descritto sulla prima, al triangolo simile, e similmente posto, che si descrive sulla seconda.

Poichè si è dimostrato, che stia CB a BG, come il triangolo ABC al triangolo DEF.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

I poligoni simili si dividono in triangoli simili, uguali in numero, ed omologhi ai tutti: e l'un poligono sta all'altro in ragion duplicata di un lato al suo omologo.

fig. 159. Sieno i poligoni simili ABCDE, FGHKL, e sia il lato AB omologo all'altro FG: dico che i poligoni ABCDE, FGHKL si dividano in triangoli simili, uguali in numero, ed omologhi ai tutti; e che il poligono ABCDE stia all'altro FGHKL in ragion duplicata di quella, che ha AB ad FG.

Si congiungano le BE, EC, GL, LH: e poichè il poligono ABCDE è simile all'altro FGHKL; l'angolo BAE sarà uguale all'angolo GFL. Ma è pure BA ad AE, come GF ad FL; perciò avendo i due triangoli ABE, FGL un angolo uguale ad un angolo, e proporzionali i lati intorno a questi angoli uguali; sarà il triangolo ABE equiangolo al-
* 6. VI l'altro FGL, e perciò simile*. Quindi l'angolo ABE è uguale all'angolo FGL. Ma è poi tutto l'angolo ABC uguale a tutto l'altro FGH, per la similitudine dei poligoni; è dunque il rimanente angolo EBC uguale al rimanente LGH, E poichè per esser simili i triangoli ABE, FGL come EB a BA, così sta LG a GF: ed è poi per la similitudine dei poligoni, come AB a BC, così FG a GH; sarà, per
* 22. V. equalità, come EB a EC, così LG a GH*. E per-

ciò i triangoli BEC, GLH avendo proporzionali i lati intorno agli angoli uguali EBC, LGH, saranno equiangoli, e quindi simili*. Per la stessa ragio- * 6. VI
ne il triangolo ECD è simile all' altro LHK; dunque i poligoni simili ABCDE, FGHKL si dividono in triangoli simili, ed uguali in numero.

Dico che questi sieno omologhi ai tutti, cioè ch' essi triangoli sieno proporzionali tra loro, ed a tutti i poligoni, e che sieno ABE, EBC, ECD gli antecedenti, ed FGL, LGH, LHK i rispettivi conseguenti; e che il poligono ABCDE stia all'altro FGHKL in ragion duplicata di un lato al suo omologo, cioè di AB ad FG.

Poichè il triangolo ABE è simile al triangolo FGL; perciò avrà il triangolo ABE al triangolo FGL ragion duplicata di quella, che BE ha a GL*. * 19. VI.
Per la stessa ragione anche il triangolo BEC sta al triangolo GLH in ragion duplicata di quella, che ha BE a GL: quindi come il triangolo ABE al triangolo FGL, così sta il triangolo BEC al triangolo GLH*. Similmente poichè il triangolo EBC * 11. V.
è simile al triangolo LGH, avrà il triangolo EBC al triangolo LGH ragion duplicata di quella, che la linea retta EC ha all' altra HL: ma per la stessa ragione anche il triangolo ECD sta al triangolo LHK in ragion duplicata di quella, che CE serba ad HL; quindi come il triangolo EBC al triangolo LGH, così sta il triangolo ECD al triangolo LHK. Si è poi dimostrato, che come il triangolo EBC al triangolo LGH, così stia il triangolo ABE al triangolo FGL: perciò, come il triangolo ABE al triangolo FGL, così sta il triangolo EBC all' altro LGH, ed il triangolo ECD all' altro LHK. Laon-

de come un antecedente al suo conseguente, così
* 12. V tutti gli antecedenti a tutti i conseguenti*; e quindi il triangolo ABE starà al triangolo FGL, come il poligono ABCDE al poligono FGHKL. Ma il triangolo ABE serba al triangolo FGL ragion duplicata di quella, che ha il lato AB all'omologo FG; mentre i triangoli simili sono in ragion duplica-
* 19.VI. ta dei loro lati omologhi * : dunque anche il poligono ABCDE serberà al poligono FGHKL ragion duplicata di quella del lato AB all' omologo FG.

E perciò i poligoni simili si dividono in triangoli simili, uguali in numero, ed omologhi ai tutti; e l'un poligono sta all'altro in ragion duplicata di un lato al suo omologo. C.B.D.

Cor. Nel modo stesso si dimostrerà per gli quadrilateri simili, ch'essi sieno in duplicata ragione dei loro lati omologhi: ed essendosi ciò anche dimostrato per gli triangoli simili; ne segue generalmente, che *Le figure rettilinee simili sono in duplicata ragione dei loro lati omologhi.*

Cor. 2. Or se si ritrovi la terza proporzionale X in ordine alle due AB, FG; starà AB ad X in ragion duplicata di quella, che ha AB ad FG. Ma serba pure il poligono, che ha per lato AB al poligono simile, che ha per lato omologo FG, ed il quadrilatero al quadrilatero ragion duplicata di quella di un lato ad un altro omologo, cioè di AB ad FG; dunque come AB ad X, così sta la figura rettilinea, che ha per lato AB all'altra, che ha per lato omologo FG: e si è lo stesso anche dimostrato per gli triangoli. Perciò generalmenie

Se tre linee rette sieno proporzionali; come la prima alla terza, così sta una figura rettilinea descritta sulla prima all' altra simile, e similmente posta, che si descrive sulla seconda.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

I rettilinei simili ad uno stesso rettilineo sono anche simili tra loro.

Sia l' uno, e l' altro dei rettilinei A, e B simile al rettilineo C: dico che il rettilineo A sia anche simile al rettilineo B. *fig. 160.*

Perchè il rettilineo A è simile all' altro C, gli sarà equiangolo, ed avranno proporzionali i lati intorno agli angoli uguali *. Similmente poichè il rettilineo B è simile all' altro C, gli sarà equiangolo, ed avranno essi proporzionali i lati intorno agli angoli uguali. Quindi ciascuno dei rettilinei A, B è equiangolo all' altro C, ed ha con questo proporzionali i lati intorno agli angoli uguali; e perciò il rettilineo A è equiangolo all'altro B, ed ha con questo anche proporzionali i lati intorno agli angoli uguali: quindi A è simile a B. C.B.D. * d.1.VI

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

Se quattro linee rette sieno proporzionali; anche i rettilinei simili, e similmente posti, che si descrivono su di esse saranno proporzionali: e se i rettilinei simili, e similmente posti, i quali si descrivono su di esse sieno proporzionali; anche tali linee rette saranno proporzionali.

fig. 161. Sieno le quattro linee rette proporzionali AB, CD, EF, GH; cioè come AB a CD, così stia EF a GH: e sopra le AB, e CD si descrivano i rettilinei simili, e similmente posti KAB, LCD; e sulle altre EF, e GH si descrivano pure i rettilinei simili, e similmente posti MF, NH: dico che come il rettilineo KAB al rettilineo LCD, così stia il rettilineo MF all' altro NH.

Si prenda in ordine alle AB, CD la terza pro-
* 11. VI. porzionale X *; ed in ordine alle EF, GH la terza proporzionale O. E poichè sta AB a CD, come EF a GH, e CD ad X, come GH ad O; sarà per equalità come AB ad X, così EF ad O. Ma come AB ad X, così sta il rettilineo KAB all' altro
*2.co.20VI LCD *, e come EF ad O, così è pure il rettilineo MF all' altro NH; dunque come il rettilineo KAB al rettilineo LCD, così sta il rettilineo MF all' altro NH.

Sia ora come il rettilineo KAB al rettilineo LCD,

così il rettilineo MF all' altro NH: dico che come AB a CD, così stia EF a GH.

Si faccia come AB a CD, così EF a PR; e descrivasi sulla PR il rettilineo SR simile, e similmente posto all'altro MF, o pure ad NH*. E poichè* 18. VI
come AB a CD, così sta EF a PR, e sulle AB, e CD si sono descritti i rettilinei simili, e similmente posti KAB, LCD; e sulle EF, PR gli altri rettilinei anche simili, e similmente posti MF, SR: perciò sarà come il rettilineo KAB al rettilineo LCD, così il rettilineo MF all' altro SR. Ma si è supposto che il rettilineo KAB stia all' altro LCD, come il rettilineo MF all' altro NH; perciò il rettilineo MF sta al rettilineo NH, come lo stesso MF all' altro SR*. Per lo che serbando il rettilineo MF a* 11. V.
ciascuno degli altri NH, ed SR la stessa ragione; sarà il rettilineo NH uguale all' altro SR. Ma gli è anche simile, e similmente posto; dunque GH è uguale a PR. E poichè come AB a CD, così stà EF a PR, e che PR è uguale à GH; sarà perciò come AB a CD, così EF a GH.

Se dunque quattro linee rette sieno proporzionali; anche i rettilinei simili, e similmente posti, che si descrivono su di esse saranno proporzionali: e se i rettilinei simili, e similmente posti, i quali descrivonsi su di esse sieno proporzionali; anche tali linee rette saranno proporzionali. C.B.D.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

I parallelogrammi equiangoli hanno tra loro una ragione composta dalle ragioni dei loro lati.

fig. 162. Sieno i parallelogrammi equiangoli AC, CF, che abbiano l'angolo BCD uguale all'angolo ECG: dico che il parallelogrammo AC serbi all'altro CF una ragioue composta dalle ragioni dei loro lati; cioè composta dalle ragioni di BC a CG, e di DC a CE.

Pongasi BC per dritto con CG; sarà anche DC
* 14. I per dritto con CE *; e compiasi il parallelogrammo DG. Ciò posto, si esponga una qualunque linea
* 12.VI. retta K; e poi si faccia come BC a CG, così K ad L *; e come DC a CE, così L ad M; saranno le ragioni di K ad L, e di L ad M le stesse che quelle dei lati, cioè di BC a CG, e di DC a CE. Ma la ragione di K ad M è composta dalla ragione di K
* d.A.V. ad L, e dall'altra di L ad M *; perciò K ad M ha una ragione composta dalle ragioni dei lati. E poichè come BC a CG, così sta il parallelogrammo AC all'altro CH, e come BC a CG, così sta K ad L; sarà come K ad L, così il parallelogrammo
* 11. V. AC all'altro CH *. Similmente poichè come DC a CE, così sta il parallelogrammo CH all'altro CF: e come DC a CE, così sta L ad M; sarà come L ad M, così il parallelogrammo CH all'altro CF. Per lo che essendosi dimostrato esser K ad L, co-

me il parallelogrammo AC all' altro CH, ed L ad M, come il parallelogrammo CH all' altro CF; sarà per equalità, come K ad M, così il parallelogrammo AC al parallelogrammo CF *. Ma la ragione di K ad M è composta da quelle dei lati: quindi starà anche il parallelogrammo AC all' altro CF in ragion composta dalle ragioni dei lati di essi. * 22. V.

E perciò i parallelogrammi equiangoli hanno tra loro una ragione composta dalle ragioni de' loro lati. C.B.D.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

I parallelogrammi, che sono intorno al diametro di ogni parallelogrammo sono simili al tutto, e tra loro.

Sia il parallelogrammo ABCD, il di cui diametro sia AC, ed intorno al diametro AC vi sieno i parallelogrammi EG, HK: dico che questi parallelogrammi EG, HK sieno simili a tutto ABCD, e tra loro. *fig.* 163.

Poichè le DC, e GF sono parallele; sarà l' angolo ADC uguale all' angolo AGF *: e per la stessa ragione, essendo parallele le BC, ed EF; sarà l'angolo ABC uguale all' altro AEF. Ma l' uno, e l' altro degli angoli BCD, EFG è uguale all' opposto DAB *; perciò essi saranno anche tra loro u- * 29. I * 34. I

guali. Laonde i parallelogrammi ABCD, AEFG sono equiangoli. Or poichè l' angolo ABC è uguale all' angolo AEF, e l' angolo BAC è comune; i triangoli BAC, EAF saranno equiangoli tra loro; quin-
* 4. VI di come AB a BC, così sta AE ad EF *. Ma i lati
* 34. I opposti de' parallelogrammi sono uguali *; perciò anche AB starà ad AD, come AE ad AG; DC a CB, come GF ad FE; e CD a DA, come FG a GA. Dunque nei parallelogrammi ABCD, ed AEFG sono proporzionali i lati intorno agli angoli uguali; e perciò il pa-
* d. 1. VI. rallelogrammo ABCD è simile all'altro AEFG*. Per la stessa ragione il parallelogrammo ABCD è simile al parallelogrammo FHCK: quindi ciascuno dei due parallelogrammi EG, HK è simile allo stesso parallelogrammo ABCD. Ma quei rettilinei, che sono simili ad uno stesso rettilineo, sono anche simili tra
* 21. VI. loro *; dunque il parallelogrammo EG è simile all' altro KH.

E perciò i parallelogrammi, che sono intorno al diametro di ogni parallelogrammo sono simili al tutto, e tra loro. C.B.D.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA.

Costituire un rettilineo simile ad un dato, ed uguale ad un altro dato.

fig. 164. Sia dato il rettilineo ABC, cui bisogna costituirne un altro simile, e D sia quello al quale que-

sto dev' essere uguale : fa d' uopo costituire un rettilineo simile ad ABC, ed uguale a D.

Si applichi alla linea retta BC il parallelogrammo BE uguale al rettilineo ABC*; e poi alla linea retta CE, e nell'angolo FCE, ch' è uguale a CBL, si applichi il parallelogrammo EF uguale al rettilineo D; sarà BC in diretto con CF, ed LE con EM *. Si prenda tra le BC, CF la media proporzionale GH *, sulla quale si descriva il rettilineo KGH simile, e similmente posto al rettilineo ABC*.

* co.45.I.
*29,e 14.I
* 13. VI.
* 18. VI.

E poichè BC sta a GH, come GH a CF; e se tre linee rette sono proporzionali, come la prima alla terza, così sta una figura rettilinea, che si descrive sulla prima, all' altra simile, e similmente posta, che si descrive sulla seconda * : sarà perciò come BC a CF, così il rettilineo ABC al rettilineo KGH. Ma come BC a CF, così sta il parallelogrammo BE all'altro EF * ; dunque come il rettilineo ABC all' altro KGH, così sta il parallelogrammo BE all'altro EF *. Per la qual cosa essendo il rettilineo ABC uguale al parallelogrammo BE; sarà anche il rettilineo KGH uguale al parallelogrammo EF * . Ma il parallelogrammo EF è uguale al rettilinco D; dunque anche il rettilineo KGH sarà uguale all'altro D: ed è poi esso KGH simile al rettilineo ABC.

*2.co.20VI
* 1. VI.
* 11. V.
* 14. V.

Perciò si è costituito un rettilineo simile al dato ABC, ed uguale all'altro dato D. C.B.F.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA.

Se da un parallelogrammo se ne tolga un altro parallelogrammo simile, e similmente posto al tutto, e che abbia con esso un angolo comune; consisterà questo col tutto intorno al diametro stesso.

fig. 165. Dal parallellogrammo ABCD se ne tolga il parallelogrammo AEFG simile, e similmente posto ad ABCD, e che abbia con esso di comune l' angolo DAB: dico che il parallelogrammo ABCD consista coll' altro AF intorno al diametro stesso.

Poichè non vi stia; ma, s' è possibile, sia AHC il diametro di ABCD, e GF incontri AHC nel punto H per lo quale si tiri ad AD, o a BC la parallela HK. E poichè il parallelogrammo ABCD coll' altro KG stanno intorno al diametro stesso; sarà il parallelogrammo ABCD simile all' altro KG *: e perciò DA sta ad AB, come GA ad AK. Ma per la similitudine de' parallelogrammi ABCD, AEFG sta DA ad AB, come GA ad AE; dunque GA sta ad AE, come GA ad AK *. Per lo che serbando GA la stessa ragione a ciascuna delle AK, AE, sarà AE uguale ad AK *; la minore alla maggiore, il che non può essere. Quindi il parallelogrammo ABCD non consiste intorno allo stesso diametro col parallelogrammo AKHG; e perciò sarà quello intorno allo stesso diametro coll' altro AEFG.

* 24. VI.
* 11. V.
* 9. V.

Dunque se da un parallelogrammo se ne tolga

un altro simile, e similmente posto al tutto, e che abbia con esso un angolo comune; consisterà questo col tutto intorno al diametro stesso. C.B.D.

N. B. La Proposizione seguente supplisce comodamente la 28, e 29 di Euclide, che si sono tralasciate; e si è perciò anche tralasciata la 27, che serviva di Lemma alla 28 (Veggasi la nota a questa Prop.)

PROPOSIZIONE A

Problema.

Applicare tra due lati di un triangolo dato una linea retta parallela al terzo lato, la quale ne tronchi, o vi aggiunga un trapezio uguale ad un rettilineo dato.

Sia ABC il triangolo dato, ed X il dato rettilineo: fa d' uopo applicare tra i lati AB,AC d' esso triangolo una linea retta parallela alla base, la quale ne tronchi, o pur vi aggiunga un trapezio uguale al dato rettilineo X. *fig.* 166.

Sopra la base BC del triangolo dato, e nell'angolo ABC, si costituisca il parallelogrammo BF uguale al rettilineo dato X *; e poi presa DG uguale a DB, tra le BA, AG si trovi la media proporzionale AH *, e per H si tiri HK parallela a BC: dico che sia HBCK il trapezio, che si vuol troncare dal triangolo ABC. * co.45. I * 13.VI.

Si congiunga GC. Ed essendo continuamente proporzionali le tre linee rette BA, AH, ed AG; sarà BA ad AG, come il triangolo BCA all'altro HKA *. * 2c.20VI

Ma è poi BA ad AG, come il triangolo BCA all' al-
* 1. VI. tro ACG *; dunque sarà il triangolo BCA al triangolo HKA, come lo stesso BCA all' altro triangolo GCA: perciò il triangolo HKA pareggerà l' altro
* 9. V GCA*; e quindi le loro differenze dal triangolo BAC saranno pure uguali; cioè il trapezio BHKC sarà uguale al triangolo GCB. Ma il triangolo GCB è uguale al parallelogrammo CD; poichè sono racchiusi tra le stesse parallele, e la base del triango-
* 42. I. lo è doppia di quella del parallelogrammo *; ed un tal parallelogrammo è uguale al rettilineo X; sarà perciò anche il trapezio BHKC uguale al rettilineo X.

Che se si voglia aggiugnere al triangolo ABC un trapezio uguale al dato rettilineo X.

Si applichi alla base BC del triangolo dato il parallelogrammo B*f* uguale al dato rettilineo X, nel-
* co.45.I. l' angolo CB*g* conseguente dall' altro CBA*: indi si prenda *dg* uguale a *d*B, e tra le BA, ed A*g* si
* 13. VI. trovi la media proporzionale A*h* *; e finalmente per lo punto *h* si tiri *hk* parallela a BC; sarà *h*BC*k* il trapezio cercato.

La dimostrazione è identica a quella del caso precedente.

E perciò si è applicata tra i lati BA, ed AC del dato triangolo ABC una linea retta HK, o pure l' altra *hk* parallela alla base BC, la prima delle quali ne ha troncato il trapezio BHKC, e l' altra vi ha aggiunto il trapezio *h*BC*k* uguale al dato rettilineo X. C.B.F.

PROPOSIZIONE XXX.

PROBLEMA.

Dividere una data linea retta terminata in estrema, e media ragione.

Sia data la linea retta terminata AB: fa d'uopo dividerla in estrema, e media ragione. *fig.* 167. *n.* 1.

Sopra AB si descriva il quadrato AC *; poi si divida per metà in E il suo lato AD, ch'è ad angolo colla AB; si descriva sulla AE l' altro quadrato EN, e si congiunga FA. Ciò posto i lati EF, ed FA del triangolo EFA si prolunghino in P, ed in H, e tra essi si adatti la linea retta KGH parallela ad EA, sicchè il trapezio AEKH pareggi il parallelogrammo EB *: dico che la linea retta AB reàsti divisa in estrema, e media ragione nel punto G; cioè che stia BA ad AG, come AG a GB. * Prop.VI

Si compiano le figure LM, e KO. E poichè il parallelogrammo EN, e l' altro KO consistono intorno al diametro stesso, saranno simili tra loro; e quindi KO sarà un quadrato del pari che EN: e perciò anche GM sarà il quadrato di GA *. Or essendo il trapezio AEKH uguale al parallelogrammo AP, toltone di comune AK, resterà il triangolo AGH uguale al parallelogrammo GP; e prendendone i doppj, sarà GM, cioè il quadrato di AG uguale a GC, ch' è doppio di GP, perchè BP è uguale a PC *: e perciò BC, o AB starà ad AG, come AG a GB *. * 24. VI. * 36. I. * 14. VI.

n. 2. Quindi la data linea retta terminata AB si è divisa in estrema, e media ragione in G. C.B.F.

ALITER: Sia data la linea retta AB: fa d'uopo dividerla in estrema, e media ragione.

Si divida AB in C in modo, che il rettangolo contenuto da AB, e BC sia uguale al quadrato di
* 11. II AC*. E poichè il rettangolo ABC è uguale al qua-
* 14. VI. drato di AC; sarà BA ad AC, come AC a CB*: e quindi la linea retta AB si sarà divisa in estrema, e media ragione in C. C.B.F.

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA.

Nei triangoli rettangoli, la figura rettilinea, che descrivesi sopra quel lato, che sottende l'angolo retto, è uguale alle altre simili, e similmente descritte sopra i lati, che contengono un tal angolo.

fig. 168. Sia il triangolo rettangolo ABC, che ha retto l'angolo BAC: dico che la figura rettilinea, che si descrive sopra BC, sia uguale alle altre figure rettilinee simili, e similmente descritte sopra le BA, ed AC.

Si tiri la perpendicolare AD. E poichè nel triangolo rettangolo ABC, dall'angolo retto, ch'è in A, si è tirata alla base BC la perpendicolare AD; saranno i triangoli ABD, ADC simili a tutto il
* 8. VI. triangolo ABC, e tra di loro*: e sarà, per la similitudine de' triangoli ABC, ABD, CB a BA, come BA a BD. Per la qual cosa essendo queste tre linee rette proporzionali, starà come la prima alla

terza, così una figura rettilinea descritta sulla prima all'altra simile, e similmente descritta sulla seconda * : e perciò come CB a BD, così starà una figura rettilinea descritta sopra CB alla simile, e similmente descritta sopra BA : ed invertendo DB starà a BC, come la figura rettilinea, che si descrive sopra AB a quella, che si descrive sopra BC *. Per la stessa ragione, come DC a CB, così sta la figura rettilinea, che si descrive sopra CA a quella, che descrivesi sopra CB : quindi come stanno le due BD, DC insieme a CB, così staranno le figure rettilinee descritte sulle BA, ed AC a quella, che si descrive sopra BC. Ma le BD, DC insieme sono uguali alla BC; dunque anche la figura rettilinea, che si descrive sulla BC è uguale alle simili, e similmente descritte sulle BA, ed AC.

* 2 co. 20 VI

* pr. 2. V.

E perciò nei triangoli rettangoli, la figura rettilinea, che si descrive sopra quel lato, che sottende l'angolo retto è uguale alle simili, e similmente descritte sopra i lati, che contengono un tal angolo. C.B.D.

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA.

Se due triangoli, i quali hanno due lati proporzionali con due lati, si compongano cogli angoli adjacenti alle loro basi in modo, che i loro lati omologhi riescano paralleli; esse basi giaceranno per dritto.

fig. 169. Sieno i due triangoli ABC, DCE, i quali abbiano i due lati BA, AC proporzionali coi due altri CD, DE in modo tale, che sia BA ad AC, come CD a DE; e sia poi AB parallela a DC, ed AC a DE: dico che BC stia per dritto con CE.

Poichè AB è parallela a DC, e cade in esse AC; saranno uguali tra loro gli angoli BAC, ACD. Per la stessa ragione anche l'angolo CDE è uguale all'angolo ACD; sarà dunque l'angolo BAC uguale all'altro CDE. Or i due triangoli ABC,DCE, avendo l'angolo, ch'è in A uguale a quello ch'è in D, e proporzionali i lati intorno a questi angoli uguali; poichè BA sta ad AC, come CD a DE;
* 6. VI. sarà il triangolo ABC equiangolo al triangolo DCE*: e quindi l'angolo ABC è uguale all'angolo DCE. Ma si è anche dimostrato l'angolo ACD uguale all'angolo BAC; perciò tutto l'angolo ACE è uguale ai due angoli ABC,BAC: vi si aggiunga di comune l'angolo ACB; saranno gli angoli ACE, ACB uguali agli altri BAC,ACB,CBA. Ma gli angoli BAC, ACB,
* 32. I. CBA fanno due retti *; quindi anche gli angoli

ACE, ACB saranno uguali a due retti. Per lo che ad una linea retta AC, e nel punto C in essa le due linee rette BC, e CE facendovi, non alla parte stessa, gli angoli ACE, ACB uguali a due retti; sarà BC per dritto con CE *. * 14. I.

E perciò se due triangoli i quali hanno due lati proporzionali con due lati, si compongano cogli angoli alla base in modo, che i loro lati omologhi riescano paralleli; esse basi giaceranno per dritto. C.B.D.

PROPOSIZIONE XXXIII.

TEOREMA.

Ne' cerchi uguali, gli angoli hanno la stessa ragione degli archi su i quali insistono, siano essi ai centri, o alle circonferenze. Ed è questa anche la ragione dei settori.

Sieno i cerchi uguali ABC, DEF; e gli angoli BGC, EHF stieno ai loro centri, gli altri BAC, EDF alle circonferenze: dico che come sta l' arco BC all' arco EF, così stia l' angolo BGC all' altro EHF, e l' angolo BAC all' altro EDF: e che nella stessa ragione stia pure il settore GBC al settore HEF. *fig.* 170.

Si pongano uguali all' arco BC quanti altri se ne vogliano successivi CK, KL; similmente all' arco EF si facciano uguali gli altri FM, MN quanti se ne vuole; e si uniscano le GK, GL, HM, HN. E poichè sono uguali gli archi BC, CK,

KL, anche gli angoli BGC, CGK, KGL saranno
* 27. III. uguali*; e perciò quanto è multiplice l'arco BL dell'arco BC, altrettanto l'angolo BGL è multiplice dell'angolo BGC. Per la stessa ragione, quanto è multiplice l'arco EN dell'arco EF, altrettanto l'angolo EHN l'è dell'angolo EHF. Or è chiaro che se l'arco BL è uguale all'arco EN, l'angolo BGL
* 27. III. sarà uguale all'angolo EHN*; se l'arco BL è maggiore dell'arco EN, l'angolo BGL sarà maggiore dell'angolo EHN; e se minore, minore. Vi sono dunque quattro grandezze, cioè i due archi BC,EF, ed i due angoli BGC, EHF; e si sono presi gli ugualmente multiplici dell'arco BC, e dell'angolo BGC, cioè l'arco BL, e l'angolo BGL; come anche dell'arco EF, e dell'angolo EHF, se ne sono presi altri ugualmente multiplici, che sono l'arco EN, e l'angolo EHN: e si è dimostrato, che se l'arco BL supera l'arco EN, l'angolo BGL superi anche l'angolo EHN; e se uguale, uguale; se minore, minore: dunque deve stare l'arco BC all'altro EF, co-
* d.5. V. me l'angolo BGC all'angolo EHF *. Ma l'angolo BGC sta all'angolo EHF, come l'angolo BAC all'angolo EDF, poichè ciascuno dei due primi è
* 20. III doppio del corrispondente degli altri due *: perciò come l'arco BC all'altro EF, così sta l'angolo BGC all'angolo EHF, e l'angolo BAC all'angolo EDF.

Adunque ne' cerchi uguali gli angoli hanno la stessa ragione degli archi su i quali insistono, siano essi ai centri, o alle circonferenze.

Dico di più, che come l'arco BC all'arco EF, così stia il settore GBC al settore HEF.

Si congiungano le BC , CK ; e poi presi negli archi BC,CK i punti X , ed O , si uniscano le BX , XC , CO , OK . E poichè le due BG , GC sono uguali alle due CG , GK , e contengono angoli uguali ; sarà anche la base BC uguale alla base CK, ed il triangolo GBC ugnale al triangolo GCK * . * 4. I
Or essendo l'arco BC uguale all' arco CK , sarà l' altro arco , che vi rimane a compiere l'intera circonferenza ABC togliendone BC , uguale a quello , che rimane per compiere la stessa circonfercnza , se da essa si tolga CK ; perciò anche l' angolo BXC è uguale all' angolo COK * ; e quindi la porzione * 27. III.
BXC è simile all' altra COK * . Ma sono costituite * d. 11 III.
sulle linee rette uguali BC , CK ; e le porzioni simili di cerchio, che sono costituite sopra linee rette uguali sono uguali tra loro * ; dunque la porzione * 24. III.
BXC è uguale all' altra COK . È poi anche il triangolo BGC uguale al triangolo CGK ; quindi tutto il settore GBC sarà uguale a tutto il settore GCK . Per la stessa ragione il settore GKL è uguale a ciascuno degli altri GKC , GCB : laonde i tre settori GBC , GCK , GKL sono tra loro uguali . Similmente si dimostreranno uguali tra loro i settori HEF , HFM , HMN . E perciò quanto l'arco LB è multiplice dell' arco BC , altrettanto il settore GBL l'è del settore GBC : e pcr la stessa ragione , quanto l' arco NE è multiplice dell' arco EF , altrettanto il settore HEN l'è del settore HEF . Or è chiaro , che se l' arco BL è uguale all' arco EN , il settore GBL è anche uguale al settore HEN ; se l' arco BL supera l' arco EN , anche il settore GBL supera l' altro HEN ; e se n' è mi-

nore, minore. Vi sono perciò quattro grandezze, cioè i due archi BC, EF, ed i due settori GBC, HEF; e si sono presi dell'arco BC, e del settore GBC gli ugualmente multiplici, che sono l'arco BL, ed il settore GBL; come pure dell'arco EF, e del settore HEF se ne sono presi altri ugualmente multiplici, che sono l'arco EN, ed il settore HEN; e si è dimostrato, che se l'arco BL supera l'arco EN, anche il settore GBL superi il settore HEN; e che se gli è uguale, gli sia uguale; se minore, minore: dunque dovrà stare l'arco BC all'arco EF, come
* d. 5. V il settore GBC al settore HEF *. C.B.D.

Cor. È anche chiaro, che come il settore al set-
* 11. V. tore, così stia l'angolo all'angolo *.

FINE DEL SESTO LIBRO.